

**MODELOWANIE PREFERENCJI
A RYZYKO '13**

Studia Ekonomiczne

ZESZYTY NAUKOWE

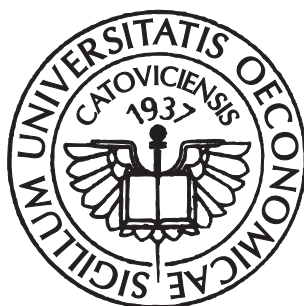
WYDZIAŁOWE

UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO

W KATOWICACH

MODELOWANIE PREFERENCJI A RYZYKO '13

**Redaktor naukowy
Tadeusz Trzaskalik**



Katowice 2013

Komitet Redakcyjny

Krystyna Lisiecka (przewodnicząca), Anna Lebda-Wyborna (sekretarz),
Florian Kuźnik, Maria Michałowska, Antoni Niederliński, Irena Pyka,
Stanisław Swadźba, Tadeusz Trzaskalik, Janusz Wywiół, Teresa Żabińska

Komitet Redakcyjny Wydziału Informatyki i Komunikacji

Tadeusz Trzaskalik (redaktor naczelny), Mariusz Żytniewski (sekretarz),
Grażyna Trzpiot, Małgorzata Pańkowska, Andrzej Bajdak

Rada Programowa

Lorenzo Fattorini, Mario Glowik, Gwo-Hsiung Tzeng,
Zdeněk Mikoláš, Marian Noga, Bronisław Micherda, Miłoś Król

Redaktor

Jadwiga Popławska-Mszyca

Skład tekstu

Urszula Grendys

© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego
w Katowicach 2013

ISSN 2083-8611

Wersją pierwotną „Studiów Ekonomicznych” jest wersja papierowa

Wszelkie prawa zastrzeżone. Każda reprodukcja lub adaptacja całości
bądź części niniejszej publikacji, niezależnie od zastosowanej
techniki reprodukcji, wymaga pisemnej zgody Wydawcy

WYDAWNICTWO UNIwersytetu Ekonomicznego w Katowicach

ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, tel.: +48 32 257-76-35, faks: +48 32 257-76-43
www.wydawnictwo.ue.katowice.pl e-mail: wydawnictwo@ue.katowice.pl

SPIS TREŚCI

WSTĘP	9
-------------	---

RYZYSKO NA RYNKU KAPITAŁOWYM

Agata Gluzicka	
ANALIZA ZALEŻNOŚCI ZACHODZĄCYCH MIĘDZY WIELKOŚCIĄ OBROTÓW A INDEKSAMI GIEŁDY PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE	13
Summary	28
 Sławomir Jarek	
KONSTRUKCJA PORTFELA KONTRAKTÓW NA RÓŻNICE KURSOWE Z UWZGLĘDNIENIEM RYZYKA RYNKOWEGO	29
Summary	43
 Bartłomiej Lach	
SELEKCJA AKCJI Z WYKORZYSTANIEM MODELI DYSKRYMINACYJNYCH ORAZ OPTYMALIZACJI PODZIAŁU ZBIORU OBIEKTÓW	45
Summary	58
 Elżbieta Majewska, Robert Jankowski	
ZASTOSOWANIE UOGÓLNIONEGO WSPÓŁCZYNNIKA GINIEGO DO POMIARU RYZYSKA SPÓŁEK WCHODZĄCYCH W SKŁAD INDEKSU WIG20.....	59
Summary	71
 Adrianna Mastalerz-Kodzis	
KONSTRUKCJA OPTYMALNYCH PORTFELI Z ZASTOSOWANIEM METOD ANALIZY FUNDAMENTALNEJ – UJĘCIE DYNAMICZNE	73
Summary	83
 Joanna Olbryś	
POMIAR SZYBKOŚCI DOSTOSOWANIA CENY PAPIERU WARTOŚCIOWEGO DO ZMIAN W ZBIORZE INFORMACJI RYNKOWYCH NA PRZYKŁADZIE SPÓŁEK Z GPW W WARSZAWIE S.A.	85
Summary	98

Ewa Pośpiech	
OCENA PORTFELI KONSTRUOWANYCH NA PODSTAWIE METODY AHP – UJĘCIE KLASYCZNE I FUNDAMENTALNE	99
Summary	111

Marcin Salamaga	
OCENA EFEKTYWNOŚCI WYBRANYCH STRATEGII INWESTOWANIA CYKLICZNEGO NA POLSKIM RYNKU KAPITAŁOWYM W ŚWIELE MIERNIKÓW OPARTYCH NA MODELU CAPM.....	113
Summary	130

OPTYMALNE DECYZJE

Katarzyna Jakowska-Suwalska, Adam Sojda	
ZASTOSOWANIE ALGORYTMU VEGA DO WYZNACZANIA POZIOMU ZAMÓWIEŃ NA MATERIAŁY W PRZEDSIĘBIORSTWIE GÓRNICZYM.....	131
Summary	143

Katarzyna Jakowska-Suwalska, Maciej Wolny	
PROCEDURA WSPOMAGANIA USTALENIA WIELKOŚCI ZAPOTRZEBOWANIA NA MATERIAŁY W KOPALNI WĘGLA KAMIENNEGO.....	145
Summary	160

Agnieszka Przybylska-Mazur	
ZNACZENIE INERCJI INFLACJI PRZY PODEJMOWANIU OPTYMALNYCH DECYZJI	161
Summary	174

Włodzimierz Rembisz, Agata Sielska	
RYZYO I CENOWA ELASTYCZNOŚĆ PODAŻY PRODUKCJI ROLNICZEJ	175
Summary	190

Wojciech Sikora, Michał Urbaniak	
SPRAWNOŚĆ METOD OGÓLNYCH I WYSPECJALIZOWANYCH W ANALIZIE CZASOWO-KOSZTOWEJ PRZEDSIĘWZIĘĆ	191
Summary	208

Olena Sobotka	
WIELOKRYTERIALNE PORZĄDKOWANIE METODĄ PROMETHEE	
ODPORNE NA ZMIANY WAG KRYTERIÓW	209
Summary	219

Grzegorz Tarczyński	
WIELOKRYTERIALNA OCENA PROCESU KOMPLETACJI TOWARÓW	
W MAGAZYNIE.....	221
Summary	238

Jacek Wrodarczyk	
DWUKRYTERIALNY MODEL WYZNACZANIA STRUKTURY PRODUKCJI	
PRZEDSIĘBIORSTWA NA PODSTAWIE TEORII OGRANICZEŃ.....	239
Summary	252

MATEMATYCZNE MODELOWANIE RYZYKA

Donata Kopańska-Bródka	
ZWIĄZKI MIAR AWERSJI DO RYZYKA Z FUNKCJAMI ZALEŻNYMI	
OD PARAMETRÓW ROZKŁADU	253
Summary	266

Piotr Zasępa	
KONSTRUKCJA PŁASZCZYZNY UŚMIECHU ZMIENNOŚCI NA RYNKU	
WALUTOWYM	267
Summary	283

MODELOWANIE ROZMYTE

Paweł Konopka	
ZASTOSOWANIE WNIOSKOWANIA ROZMYTEGO DO OCENY RYZYKA	
KREDYTOWEGO PRZEDSIĘBIORSTW	285
Summary	299

Dorota Kuchta, Ewa Ptaszyńska	
ROZMYTE DRZEWA DECYZYJNE JAKO NARZĘDZIE ZARZĄDZANIA	
RYZYSKIEM PROJEKTÓW ROLNYCH.....	301
Summary	314

Krzysztof Piasecki	
ROZMYTA RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI STRUMIENI FINANSOWYCH	317
Summary	331

Adam Sojda	
ELASTYCZNOŚĆ DECYZYJNA I RYZYKO W OCENIE PROJEKTÓW	
INWESTYCYJNYCH PRZY ZASTOSOWANIU METODY PAY-OFF	333
Summary	346

WSTĘP

W niniejszym tomie znajdują się prace poświęcone zagadnieniom związanym z ryzykiem na rynku kapitałowym, podejmowaniem optymalnych decyzji, matematycznym modelowaniem ryzyka oraz modelowaniem rozmytym. Niżej przedstawiono ich krótkie omówienie.

RYZIKO NA RYNKU KAPITAŁOWYM

W pracy **Analiza zależności zachodzących między wielkością obrotów a indeksami giełdy papierów wartościowych w Warszawie** (A. Gluzicka) przedstawione zostały wyniki badań dotyczących zależności zachodzących między ceną lub stopą zwrotu indeksu a wielkością obrotów dla wybranych indeksów w okresach, w których odnotowano długotrwałe wzrosty lub spadki notowań giełdowych.

W **Konstrukcji portfela kontraktów na różnice kursowe z uwzględnieniem ryzyka rynkowego** (S. Jarek) omówiono różne mierniki ekspozycji na ryzyko rynkowe stosowane przez renomowane instytucje finansowe oraz zaproponowano kilka mierników wspomagających konstrukcję portfela kontraktów na różnice kursowe.

W opracowaniu **Selekcja akcji z wykorzystaniem modeli dyskryminacyjnych oraz optymalizacji podziału zbioru obiektów** (B. Lach) typowano spółki, których akcje w kwartale po publikacji sprawozdań finansowych powinny uzyskiwać wyższe stopy zwrotu niż średnia stopa zwrotu wszystkich badanych spółek w kwartale.

W pracy **Zastosowanie uogólnionego współczynnika Giniego do pomiaru ryzyka spółek wchodzących w skład indeksu WIG20** (E. Majewska, R. Jankowski) prezentowane zagadnienia zilustrowane zostały badaniami empirycznymi przeprowadzonymi na podstawie danych dotyczących dziennych stóp zwrotu wybranych akcji notowanych na GPW w Warszawie w latach 2010-2012.

W artykule **Konstrukcja optymalnych portfeli z zastosowaniem metod analizy fundamentalnej – ujęcie dynamiczne** (A. Mastalerz-Kodzis) wykorzystano metodologię wielowymiarowej analizy porównawczej z uwzględnieniem dynamiki zmiennych.

Pomiar szybkości dostosowania ceny papieru wartościowego do zmian w zbiorze informacji rynkowych na przykładzie spółek z GPW w Warszawie S.A. (J. Olbryś) zawiera analizę teoretyczną problemu opóźnień oraz analizę empiryczną w grupie 20 spółek, notowanych w okresie styczeń 2007-grudzień 2012.

W pracy **Ocena portfeli konstruowanych na podstawie metody AHP – ujęcie klasyczne i fundamentalne** (E. Pośpiech) jako kryteria wykorzystywane są m.in. podstawowe charakterystyki, takie jak stopa zwrotu I wariancja stopy zwrotu, a także wskaźniki określające kondycję ekonomiczno-finansową spółek.

W opracowaniu **Ocena efektywności wybranych strategii inwestowania cyklicznego na polskim rynku kapitałowym w świetle mierników opartych na modelu CAPM** (M. Salamaga) zastosowano klasyczne mierniki jakości zarządzania portfelem inwestycyjnym uwzględniające koncepcję wyceny aktywów kapitałowych.

OPTYMALNE DECYZJE

W pracy **Zastosowanie algorytmu VEGA do wyznaczania poziomu zamówień na materiały w przedsiębiorstwie górniczym** (K. Jakowska-Suwalska, A. Sojda) przedstawiono zastosowanie wielokryterialnego nieliniowego zagadnienia do wspomagania planowania wielkości zapotrzebowania na materiały w kopalni węgla kamiennego.

Opracowanie **Procedura wspomagania ustalenia wielkości zapotrzebowania na materiały w kopalni węgla kamiennego** (K. Jakowska-Suwalska, M. Wolny) przedstawia propozycję procedury oraz jej zastosowanie na przykładzie wybranych produktów.

W pracy **Znaczenie inercji inflacji przy podejmowaniu optymalnych decyzji** (A. Przybylska-Mazur) zaprezentowano dwa warianty modelu strukturalnego Woodforda: model nieuwzględniający inercji inflacji oraz model z inercją inflacji.

W artykule **Ryzyko i cenowa elastyczność podaży produkcji rolniczej** (W. Rębisz, A. Sielska) podjęto problem wrażliwości producentów rolnych na zmiany cen skupu, przyjmując jako funkcję celu producenta rolnego oczekiwany dochód.

W pracy **Sprawność metod ogólnych i wyspecjalizowanych w analizie czasowo-kosztowej przedsięwzięć** (W. Sikora, M. Urbaniak) porównano sprawność trzech metod rozwiązywania problemu: metody ogólnej, nowego algorytmu wydłużania czynności W1 oraz zmodyfikowanego algorytmu Kaufmanna i Desbazeille'a.

Wielokryterialne porządkowanie metodą PROMETHEE odporne na zmiany wag kryteriów (O. Sobotka) to opracowanie, w którym przedstawiono proponowane w literaturze koncepcje odporności i oparte na nich sposoby wielokryterialnego porządkowania wariantów w warunkach niepewnej informacji co do wag kryteriów.

W pracy **Wielokryterialna ocena procesu kompletacji towarów w magazynie** (G. Tarczyński) podjęto próbę wyciągnięcia ogólnych wniosków dotyczących kształtu strefy kompletacyjnej, liczby wózków widłowych i metod wyznaczania trasy.

W opracowaniu **Dwukryterialny model wyznaczania struktury produkcji przedsiębiorstwa na podstawie teorii ograniczeń** (J. Wrodarczyk) przedstawiono model programowania całkowitoliczbowego, który wykorzystać można zarówno w sytuacji, gdy w przedsiębiorstwie zidentyfikowano jedno wąskie gardło, jak i w przedsiębiorstwach mających wiele wąskich gardeł.

MATEMATYCZNE MODELOWANIE RYZYKA

Praca **Związki miar awersji do ryzyka z funkcjami zależnymi od parametrów rozkładu** (D. Kopańska-Bródka) dyskutowany jest problem zgodności relacji preferencji w modelu oczekiwanej użyteczności oraz modelu średnia-wariancja.

W opracowaniu **Konstrukcja płaszczyzny uśmiechu zmienności na rynku walutowym** (P. Zasępa) scharakteryzowano podstawowe pojęcia związane z interpolacją i ekstrapolacją notowań zmienności dla par określonych kursów walutowych.

MODELOWANIE ROZMYTE

W pracy **Zastosowanie wnioskowania rozmytego do oceny ryzyka kredytowego przedsiębiorstw** (P. Konopka) pokazano, że ujęcie usystematyzowanej wiedzy eksperckiej w modelu rozmytym, bazującym na danych historycznych, daje zadowalające wyniki klasyfikacji kredytobiorców.

Rozmyte drzewa decyzyjne jako narzędzie zarządzania ryzykiem projektów rolnych (D. Kuchta, E. Ptaszyńska) to opracowanie, w którym przedstawiono założenia systemu zarządzania ryzykiem oraz wybrane kroki eksperymentu z zastosowaniem tego systemu, przeprowadzonego w jednym z polskich przedsiębiorstw rolnych.

W pracy **Rozmyta relacja równoważności strumieni finansowych** (K. Piasecki) uzyskano model, który zastosowano do wyznaczenia długości okresu obrachunkowego stosowanego w warunkach wysokiej inflacji.

W referacie **Elastyczność decyzyjna i ryzyko w ocenie projektów inwestycyjnych przy zastosowaniu metody pay-off** (A. Sojda) zaprezentowano na przykładach zastosowanie rozmytej wersji tej metody do oceny projektów inwestycyjnych w kopalnia węgla kamiennego.

Tadeusz Trzaskalik

RYZIKO NA RYNKU KAPITAŁOWYM

Agata Gluzicka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ANALIZA ZALEŻNOŚCI ZACHODZĄCYCH MIĘDZY WIELKOŚCIĄ OBROTÓW A INDEKSAMI GIEŁDY PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE

Wprowadzenie

Zazwyczaj do opisu rynków finansowych wykorzystywane są głównie notowania indeksów giełdowych. Na podstawie notowań uzyskujemy m.in. informacje o zysku czy ryzyku związanym z danym indeksem. Jednak obok ceny również istotnym parametrem charakteryzującym dany indeks jest wielkość obrotów (zwana również wolumenem). Autorzy wielu opracowań zakładają, że wolumen zachowuje się w odmienny sposób niż cena i w związku z tym dostarcza innych informacji, zatem posługując się w analizach danymi dotyczącymi zarówno notowań jaki i wolumenu otrzymujemy pełniejszy opis sytuacji rynku¹.

Wolumen jest wykorzystywany m.in. w analizie technicznej jako jedno z kryteriów podejmowania decyzji inwestycyjnych. Zdaniem niektórych autorów, informacje o wolumenie można wykorzystać do predykcji cen². Wolumen może być także traktowany jako źródło dodatkowych informacji i może być wykorzystywany w modelach służących do rozwiązywania problemów dotyczących asymetrii informacji na rynkach. Przykład takiego modelu zapropo-

¹ C. Hiemstra, J. Jones: Testing for Linear and Nonlinear Granger Causality in the Stock Price-volume Relation. „Journal of Finance” 1994, Vol. 49, No. 5.

² C. Lee, B. Swaminathan: Price Momentum and Trading Volume. „Journal of Finance” 2000, Vol. 55, No. 5, s. 2017-2069.

nował m.in. Suominen³ Z kolei Blum, Easley i O'Hara⁴ (1994) wprowadzili model, w którym wolumen interpretowany jest jako źródło precyzji nowej informacji napływającej na rynek.

W literaturze przedmiotu prezentowane są wyniki badań dotyczących zależności zachodzących między ceną a wolumenem indeksów. Analizy dotyczące powiązań między notowaniami a wielkością wolumenu wykorzystywane są jako jeden ze sposobów oceny funkcjonowania rynków finansowych. Wnioski otrzymane w takich analizach można wykorzystać do interpretacji innych badań dotyczących m.in. rozprzestrzeniania się informacji.

W prowadzonych dla różnych rynków giełdowych analizach dotyczących relacji cena-wolumen zaobserwowano sprzeczne zależności. Część badań wykazała np., że ceny wykazują większą tendencję do odwrócenia w sytuacji, gdy występuje mały wolumen⁵. Niska wartość obrotów tłumaczona jest wówczas jako skutek małej aktywności lepiej poinformowanych inwestorów. W innych badaniach stwierdzono przeciwną zależność, tzn. tendencje cenowe są bardziej narażone na odwrócenie przy dużym wolumenie⁶. Taka zależność z kolei jest wynikiem rosnących kosztów transakcyjnych.

Również stopień rozwoju analizowanego rynku giełdowego ma wpływ na istnienie zależności cena-wolumen. W większości analiz przeprowadzonych dla rozwiniętych rynków kapitałowych stwierdzono wpływ stóp zwrotu na wolumen, jednak przy braku powiązań przyczynowych skierowanych w odwrotnym kierunku⁷. Bardziej zróżnicowane wyniki uzyskano dla rynków wschodzących. Dla wielu z nich stwierdzono bowiem istnienie dwukierunkowej przyczynowości pomiędzy cenami a wolumenem.

Do wyjaśnienia związków między ceną a obrotem indeksu stosowane są różne narzędzia i modele teoretyczne. Najprostszym narzędziem wykorzystywanym do analizy powiązań pomiędzy ceną a wolumenem indeksów giełdowych jest współczynnik korelacji⁸. W wyniku przeprowadzonych badań nad zależ-

³ M. Suominen: Trading Volume and Information Revelation in Stock Markets. „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 2001, Vol. 36, No. 4, s. 546-565.

⁴ L.D. Blume, D. Easley, M. O'Hara: Market Statistics and Technical Analysis: the Role of Volume. „Journal of Finance” 1994, Vol. 49, No. 1, s. 153-181.

⁵ S. Stickel, R. Verrecchia: Evidence that Trading Volume Sustains Stock Price Changes. „Financial Analysts Journal” 1994, Vol. 50, No. 6, s. 57-67.

⁶ J.S. Campbell, S. Grossman, J. Wang: Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns. „Quarterly Journal of Economics” 1993, Vol. 108, No. 4, s. 905-939.

⁷ C. Lee, B. Swaminathan: Op. cit., s. 2017-2069.

⁸ Gold: Price-volume Relationships and Stock Returns. „Journal of Accounting and Finance Research” 2004, No. 2, s. 85-94.

nością korelacyjną między stopami zwrotu a wolumenem oraz między wariancją cen a wolumenem otrzymano dodatnie wartości korelacji, co sugerowałoby, że ceny i ilości można traktować jako substytucyjne miary reakcji rynków na nowe informacje. Jednak, jak zauważa autor, nie wnoszą one nic do prognoz rynkowych.

W badaniach wykorzystywane są również modele sekwencyjnego napływu informacji, modele mieszanki rozkładów czy modele asymetrycznej informacji. Wymienione przykłady modeli pozwalają udowodnić istnienie związku między ceną a wolumenem. Liczną grupę badań stanowią analizy dotyczące dwukierunkowej zależności między stopą zwrotu a wolumenem⁹. Henry i MacKenzi¹⁰ (2006) badali m.in. związek między obrotem a zmiennością ceny dopuszczając krótką sprzedaż na rynku i wykazali asymetryczną dwukierunkową zależność między zmiennością i wolumenem. Badaniu poddawane były również dynamiczne zależności między stopą zwrotu a wolumenem¹¹. Przykładem są analizy prowadzone przez Wanga, który w swoich badaniach zaproponował model z asymetryczną informacją, za pomocą którego wykazał, że wolumen może dostarczyć informacji o przyszłej oczekiwanej stopie zwrotu¹².

Również dla polskiego rynku giełdowego prowadzone były badania dotyczące zależności między ceną indeksów a wielkością obrotów. Przykładowe badania dla indeksów WIG, WIG20, MWIG40, SWIG80 w okresie 2000-2007 wskazały na silną korelację pomiędzy wartościami indeksów giełdowych a wielkością obrotów, a także na słabą zależność pomiędzy przyrostami wartości indeksów giełdowych a przyrostami wielkości obrotów. Testy przyczynowości Grangera wykazały, że w przypadku analizowanych indeksów można mówić o zależności wielkości obrotów od wartości indeksów¹³.

Innym przykładem są badania dotyczące wpływu wolumenu na warunkową wariancję stóp zwrotu. Analizy przeprowadzone za pomocą testu liniowej przyczynowości Grangera oraz współczynnika korelacji krzyżowej wykazały liniowy

⁹ C. Hiemstra, J. Jones: Op. cit.; Chen, Firth, Rui: The Dynamic Relation between Stock Return, Trading Volume and Volatility. „Financial Review” 2001, Vol. 38, No. 3; T. Assogbavi, J. Schell, S. Fagnisse: Equity Price-Volume Relationship on the Russian Stock Exchange. „International Business & Economics Research Journal”, Vol. 6, No. 9, s. 107-116.

¹⁰ O.T. Henry: M. MacKenzi: The Impact of Short Selling on the Price – Volume Relationship: Evidence from Hong Kong. Working Papers, 2004.

¹¹ L.D. Blume, D. Easley, M. O'Hara: Op. cit., s. 153-181.

¹² J. Wang: A Model of Competitive Trading Volume. „Journal of Political Economy” 1994, Vol. 102, s. 127-128.

¹³ J. Rambeza, G. Przekota, A. Szczepańska-Przekota: Analiza powiązań między indeksami giełdowymi i wielkością obrotów na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. „Bank i Kredyt. Rynki i Instytucje Finansowe” 2008, s. 61-69.

wpływ stóp zwrotu oraz ich zmienności na wielkość obrotów, a także istnienie słabszej zależności przeciwnej. Ponadto, wykazany został nieliniowy wpływ wolumenu na stopy zwrotu¹⁴.

W artykule przedstawione zostaną wyniki badań dotyczących zależności zachodzących między wolumenem a notowaniami lub stopą zwrotu dla wybranych indeksów z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Głównym celem opracowania jest porównanie tych zależności w trzech okresach: w okresie dobrej koniunktury polskiego rynku giełdowego (okres bezpośrednio poprzedzający ostatni kryzys ekonomiczny), w okresie gwałtownych spadków notowań (okres kryzysu) oraz w następującym bezpośrednio po nim okresie odbicia.

1. Wybrane metody analizy zależności

Do analizy zależności między zmiennymi wykorzystywane są liczne narzędzia statystyczne i ekonometryczne. Analizę taką można przeprowadzić za pomocą standardowego modelu liniowego, konstruowanego przy wykorzystaniu klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Do analizowania zależności wykorzystuje się również analizę kointegracji, analizę częstotliwości, modele VAR, modele wyboru dyskretnego czy modele typu GARCH.

Najprostszą metodą wykorzystywaną w badaniach nad zależnością między zmiennymi jest analiza współczynnika korelacji między tymi zmiennymi. Współczynnik korelacji określa siłę i kierunek powiązania między badanymi cechami zmiennych. Współczynnik ten definiowany jest następującym wzorem

$$\rho_{12} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i (R_{1i} - R_1)(R_{2i} - R_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (1)$$

gdzie ρ_{12} – współczynnik korelacji między zmienną X_1 i zmienną X_2 , R_k – średnia wartość k-tej zmiennej, σ_k – odchylenie standardowe k-tej zmiennej, R_{ki} – możliwe wartości k-tej zmiennej (cena indeksu, stopa zwrotu, wartość wolumenu) ($k = 1, 2$). Znak współczynnika korelacji wskazuje na kierunek po-

¹⁴ T. Wójtowicz: Wpływ wielkości obrotów na ocenę warunkowej wariancji stop zwrotu akcji na GPW w Warszawie. Rynek Kapitałowy – skuteczne inwestowanie. Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2008, nr 10, s. 687-696.

wiązania badanych charakterystyk. Gdy współczynnik przyjmuje wartości dodatnie, to mówimy o występowaniu tzw. dodatniej korelacji między zmiennymi, co oznacza, że wzrostowi (spadkowi) wartości jednej zmiennej odpowiada wzrost (spadek) wartości drugiej zmiennej. W przypadku, gdy wartość współczynnika korelacji jest ujemna oznacza to, że wzrostowi (spadkowi) wartości jednej zmiennej towarzyszy spadek (wzrost) wartości drugiej zmiennej. Wartość bezwzględna współczynnika korelacji wskazuje na siłę powiązania między zmiennymi. Im wyższa wartość bezwzględna, tym silniejsze powiązanie między zmiennymi.

Drugim narzędziem zastosowanym w przeprowadzonych badaniach jest test liniowej przyczynowości Grangera. Test ten polega na zbadaniu, czy określona zmienna X jest przyczyną zmiennej Y . Zmienna X jest przyczyną w sensie Grangera dla zmiennej Y , jeśli uwzględnienie w modelu objaśniającym dla Y opóźnionych wartości zmiennej X do rzędu q włącznie poprawia jakość wnioskowania (modelowania, prognozowania) zmiennej Y . Punktem wyjścia do przeprowadzenia testu przyczynowości w sensie Grangera jest oszacowanie modelu następującej postaci¹⁵

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_q y_{t-q} + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \eta_t \quad (2)$$

gdzie:

y_s ($s = t - q, \dots, t - 2, t - 1, t$) – realizacje zmiennej Y ,

x_s ($s = t - q, \dots, t - 2, t - 1, t$) – realizacje zmiennej X ,

α_j, β_j ($j = 1, 2, \dots, q$) – parametry strukturalne modelu,

q – rząd opóźnienia modelu,

η_t – składnik losowy modelu.

Hipoteza zerowa sprawdzająca, czy zmiany zmiennej X nie są przyczyną (w sensie Grangera) zmian zmiennej Y odpowiada warunkowi

$$H_0: \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \dots, \beta_q = 0$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1: \beta_1 \neq 0 \vee \beta_2 \neq 0 \vee \dots \vee \beta_q \neq 0$$

¹⁵ W. Charemza: Nowa ekonometria. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1987.

Statystyka służąca do sprawdzenia prawdziwości hipotezy zerowej, mówiącej o braku związku przyczynowego pomiędzy zmiennymi, ma postać

$$G = TR^2 \quad (3)$$

gdzie T oznacza liczbę obserwacji, a R^2 to współczynnik determinacji modelu (2). Rozkład statystyki G jest zbieżny do rozkładu $\chi^2(q)$.

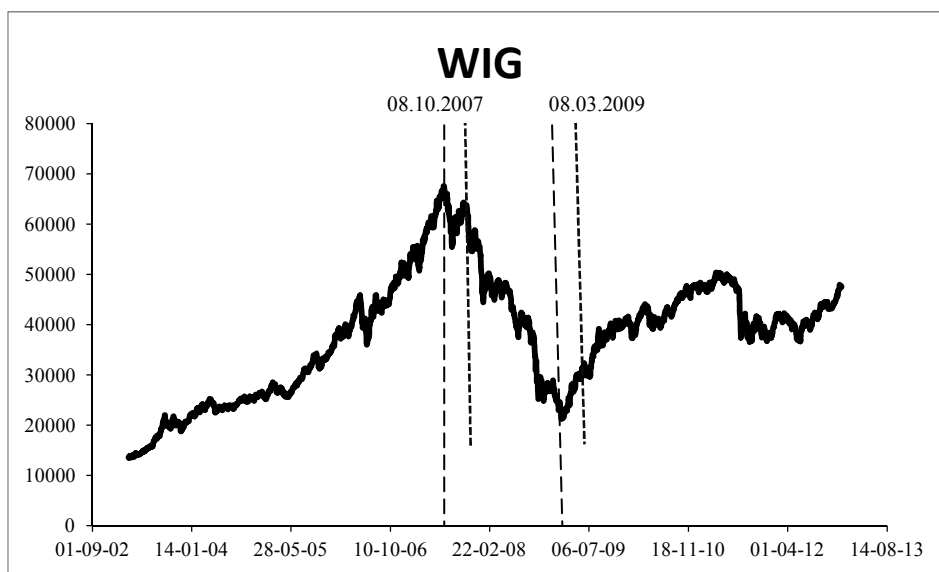
2. Analiza zależności między ceną, stopą zwrotu a wolumenem indeksu

Celem prowadzonych badań było ustalenie istnienia zależności zachodzących między ceną a wolumenem oraz między stopą zwrotu a wolumenem dla wybranych indeksów z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Celem szczegółowym była weryfikacja zależności w okresach, w których zaobserwowano długotrwały wzrost lub spadki notowań. Analizując dzienne notowania głównego indeksu GPW w Warszawie, jakim jest indeks WIG ustalono następujący podział danych:

- 01.03.2003-08.10.2007 (okres długotrwałych wzrostów notowań),
- 09.10.2007-08.03.2009 (okres długotrwałych spadków notowań spowodowany światowym kryzysem ekonomicznym),
- 09.03.2009-31.12.2012 (okres odbicia, okres ponownych wzrostów).

Dodatkowo, w celu porównania zależności cena-wolumen oraz wolumen-stopą zwrotu analizowane były również dla danych z okresu 2003-2012.

Na rys. 1 przedstawione zostały dzienne notowania indeksu WIG wraz z ustalonym podziałem na poszczególne okresy.



Rys. 1. Notowania indeksu WIG w okresie 01.03.2003-31.12.2012

W badaniach wykorzystano dane dotyczące dziennych notowań następujących indeksów: WIG-BANKI, WIG-BUDOWLANE, WIG-DEWELOPERZY, WIG-INFORMATYKA, WIG-MEDIA, MWIG40, WIG-PALIWA, WIG-SPOŻYWCZE, SWIG80, WIG-TELEKOMUNIKACJA, WIG20. Wszystkie analizowane indeksy w badanym okresie 2003-2012 notowane były bez zawiesznień.

Pierwszy etap badań dotyczył analizy indeksów ze względu na korelacje zachodzące między notowaniami a wielkością obrotów oraz między wolumenem a średnią stopą zwrotu z indeksu. Otrzymane wartości współczynników korelacji przedstawiono w tabelach 1-2.

Tabela 1

Wartości współczynników korelacji między ceną indeksu a wolumenem

	I okres	II okres	III okres	2003-2012
1	2	3	4	5
WIG-BANKI	0,479146	-0,49504	-0,26922	0,238357
WIG-BUDOWL	0,610571	0,243156	-0,54921	0,003648
WIG-DEWELOP	0,624306	-0,32615	0,106691	-0,14130
WIG-INFORMA	0,506901	0,399225	0,062840	0,213798
WIG-MEDIA	0,639446	0,024498	0,013299	0,213759
MWIG40	0,651380	0,248061	0,083006	0,080734

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5
WIG-PALIWA	0,244601	-0,21065	0,301660	0,126714
WIG-SPOŻYW	0,408027	0,286071	-0,41301	0,031025
SWIG80	0,734182	0,364323	-0,09544	0,581207
WIG-TELEKOM	0,329957	-0,017273	-0,02051	0,175213
WIG20	0,712900	-0,198940	-0,23493	0,129174

Tabela 2

Wartości współczynników korelacji między wolumenem a stopą zwrotu

	I okres	II okres	III okres	2003-2012
WIG-BANKI	0,100839	-0,12945	0,148018	0,043326
WIG-BUDOWL	0,068016	0,149432	0,019383	-0,00017
WIG-DEWELOP	-0,02630	0,112844	0,142230	0,059155
WIG-INFORMA	0,003100	-0,01558	-0,04901	-0,02662
WIG-MEDIA	0,051853	-0,13176	0,042816	-0,00879
MWIG40	0,082400	-0,02208	-0,03924	-0,02284
WIG-PALIWA	0,084962	0,037558	0,029235	0,041651
WIG-SPOŻYW	0,063850	0,060346	0,089587	0,058511
SWIG80	0,048576	0,031368	0,068563	0,022815
WIG-TELEKOM	0,086905	-0,02710	-0,07555	0,003028
WIG20	0,025850	0,023178	0,107565	0,035754

Na podstawie otrzymanych wyników możemy stwierdzić, że między ceną a wolumenem istnieje silna zależność korelacyjna jedynie w okresie wzrostu notowań. To właśnie dla danych z tego okresu otrzymano najwyższe wartości współczynników korelacji, co więcej, dla wszystkich analizowanych indeksów współczynniki korelacji przyjmowały wartości dodatnie. Możemy zatem wnioskować, że w przypadku wszystkich analizowanych indeksów w okresie poprzedzającym kryzys wzrost ceny/wolumenu powodował wzrost wielkości obrotów/ceny tegoż indeksu.

W okresie kryzysu, jak i w następującym po nim okresie odbicia nie istnieje jednoznacznie określony kierunek zależności między ceną a wolumenem. Świadczą o tym otrzymane zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości współczynnika korelacji. Natomiast w przypadku analizy wieloletniej obejmującej okres 2003-2012 również występuje zgodność kierunku zmian cen i wolumenu. Jednak zależność ta jest zdecydowanie słabsza niż w przypadku okresu wzrostu notowań. Wyjątek stanowi indeks WIG-PALIWA, dla którego otrzymano ujemny współczynnik korelacji.

W poszczególnych analizowanych okresach najwyższy współczynnik korelacji otrzymano dla różnych indeksów. W okresie przed kryzysem najwyższe wartości współczynnika korelacji odnotowano dla indeksów SWIG80 i WIG20. Najsilniejszą korelację między ceną a wolumenem w okresie spadków odnotowano dla indeksu SWIG80 oraz WIG-INFORMATYKA. Również dla danych z okresu 2003-2012 najsilniej skorelowana okazała się cena z wolumenem indeksu SWIG80. Natomiast w okresie odbicia najsilniej (dodatnio) skorelowane okazały się cena i wolumen indeksu WIG-PALIWA.

Wśród analizowanych indeksów uwagę zwracają indeksy WIG-INFORMATYKA, WIG-MEDIA, MWIG40, dla których bez względu na charakter badanego okresu otrzymano dodatnią wartość współczynnika korelacji. Oznacza to, że na polskim rynku giełdowym możemy wskazać indeksy, dla których zmiana wartości indeksu powoduje zmianę w tym samym kierunku wielkości wolumenu.

Analiza korelacji między wolumenem a stopą zwrotu wskazuje na istnienie zależność korelacyjnej w pierwszym z analizowanych okresów. Jednak zależność ta jest zdecydowanie słabsza niż w przypadku ceny i wolumenu. Wyjątkiem jest indeks WIG-DEVELOPERZY, dla którego otrzymano ujemny współczynnik korelacji, czyli w tym przypadku wzrost wolumenu powodował spadek stopy zwrotu. W każdym z pozostałych analizowanych okresów otrzymano współczynniki korelacji zarówno o dodatnich jak i ujemnych wartościach. Zatem nie istnieje jednoznacznie określona zależność wolumen-stopa zwrotu.

Analiza korelacji dostarcza informacji o istnieniu oraz sile zależności zmian między dwoma wielkościami. W dalszej części przedstawione zostaną wyniki badań dotyczące kierunku tych zależności.

Badanie współzależności danych w postaci szeregów czasowych standardowo poprzedza badanie stacjonarności analizowanych zmiennych. Do oceny stacjonarności indeksów giełdowych najczęściej wykorzystywany jest rozszerzony test Dickeya-Fullera (test ADF).

W teście ADF hipoteza zerowa zakłada, że szereg jest niestacjonarny ze względu na występowanie pierwiastka jednostkowego, natomiast hipoteza alternatywna mówi, że szereg jest szeregiem stacjonarnym. Jeśli obliczona wartość statystyki jest większa niż wartość krytyczna, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, czyli analizowany szereg jest szeregiem niestacjonarnym. Na podstawie definicji integracji zmiennych wprowadzonej przez Engle'a i Grangera, jeśli zmienna jest niestacjonarna, a jej pierwsze przyrosty są stacjonarne, to zmienna jest zintegrowana stopnia 1¹⁶.

¹⁶ M. Osińska: *Ekonometria finansowa*. PWE, Warszawa 2006.

W tabeli 3 przedstawione zostały parametry przeprowadzonych testów (wartości statystyk ADF oraz wartości prawdopodobieństwa p-value) dla danych dotyczących cen indeksów z okresu poprzedzającego kryzys. Analiza przeprowadzona na poziomie istotności $\alpha = 0,05$, dla wszystkich rozpatrywanych indeksów wykazała, że prawdziwa jest hipoteza zerowa mówiąca, że procesy są zintegrowane co najmniej rzędu pierwszego. Poprawna specyfikacja modelu wykorzystywanego do ustalenia przyczynowości wymaga, aby zmienne były stacjonarne, dlatego w dalszej kolejności przeprowadzono testy ADF dla pierwszych przyrostów analizowanych wielkości. Na podstawie analizy stacjonarności pierwszych przyrostów wnioskujemy, że w pierwszym okresie szeregi notowań wszystkich analizowanych indeksów są szeregami zintegrowanymi w stopniu pierwszym.

Tabela 3

Parametry testu ADF dla cen indeksów w okresie I

	Parametry testu ADF dla cen indeksów		Parametry testu ADF dla pierwszych przyrostów	
	statystyka	p-value	statystyka	p-value
BANKI	-1,75625	0,7260	-14,4189	0,0000
BUDOWLANE	-1,31527	0,8840	-17,624	0,0000
DEWELOP	-0,32923	0,9183	-11,0171	0,0000
INFO	-1,69687	0,7530	-10,5786	0,0000
MEDIA	-0,45491	0,8974	-15,2255	0,0000
MWIG40	-1,60085	0,7931	-12,3244	0,0000
PALIWA	-1,40133	0,5833	-13,4805	0,0000
SPOŻYWCZE	-1,27928	0,6415	-11,3023	0,0000
SWIG80	-1,2526	0,8986	-9,0063	0,0000
TELEKOM	-1,74367	0,6092	-11,2204	0,0000
WIG20	-0,23742	0,9313	-13,9444	0,0000

W podobny sposób przeprowadzono testy stacjonarności dla pozostałych analizowanych szeregów. We wszystkich przypadkach szereg okazał się zintegrowany w stopniu pierwszym.

W dalszej kolejności ustalono rząd opóźnienia modelu opisanego równaniem (2). W tym celu dla każdego szeregu zastosowano standardowe kryteria: Akaike (AIC), Schwartz-Bayesian (BIC), Hannan-Quinna (HQC)¹⁷. Na pod-

¹⁷ Ibid.

stawie informacji otrzymanych z zastosowanych kryteriów w analizowanych modelach przyjęto liczbę opóźnień równą 2, co zapewniło brak autokorelacji zakłóceń.

Przyczynowość związku pomiędzy wartością indeksu a wielkością obrotów oraz pomiędzy wolumenem a stopą zwrotu indeksu zweryfikowano za pomocą testu liniowej przyczynowości Grangera. Weryfikowane były następujące hipotezy zerowe:

- zmiany wartości indeksu nie są przyczyną zmian wielkości obrotu,
- zmiany wielkości obrotu nie są przyczyną zmian wartości indeksu,
- zmiany wartości stóp zwrotu nie są przyczyną zmian wielkości obrotu,
- zmiany wielkości obrotu nie są przyczyną zmian wartości stóp zwrotu.

Rezultaty otrzymane w wyniku przeprowadzonych testów przedstawiono w tabelach 4 i 5. W tabelach zastosowano oznaczenia: $c \rightarrow w$ – zmiany ceny wpływają na zmiany wolumenu, $w \rightarrow c$ – zmiany wolumenu wpływają na zmiany ceny, $w \rightarrow s$ – zmiany wolumenu wpływają na zmiany stopy zwrotu, $s \rightarrow w$ – zmiany stopy zwrotu wpływają na zmiany wolumenu. Test Grangera przeprowadzono dla poziomu istotności 0,05. Błędy standardowe otrzymane dla przeprowadzonych testów nie przekraczały 40%.

Tabela 4

Zależności zachodzące między ceną a wolumenem indeksu

	I OKRES		II OKRES		III OKRES		2003-2012	
	$c \rightarrow w$	$w \rightarrow c$	$c \rightarrow w$	$w \rightarrow c$	$c \rightarrow w$	$w \rightarrow c$	$c \rightarrow w$	$w \rightarrow c$
BANKI	X		X		X		X	
BUDOWLANE	X		X		X			
DEVELOP	X		X				X	
INFO	X		X				X	
MEDIA	X						X	
MWIG40	X	X	X					
PALIWA	X		X		X			X
SPOŻYWCZE	X		X	X	X			
SWIG80	X	X	X	X	X		X	X
TELEKOM	X						X	
WIG20	X		X		X		X	

Tabela 5

Zależności zachodzące między stopą zwrotu a wolumenem indeksu

	I OKRES		II OKRES		III OKRES		2003-2012	
	w → s	s → w	w → s	s → w	w → s	s → w	w → s	s → w
BANKI			X					
BUDOWLANE								X
DEWELOP		X						
INFO								
MEDIA	X	X		X				
MWIG40								
PALIWA						X		X
SPOŻYWCZE							X	
SWIG80					X		X	
TELEKOM					X			
WIG20								X

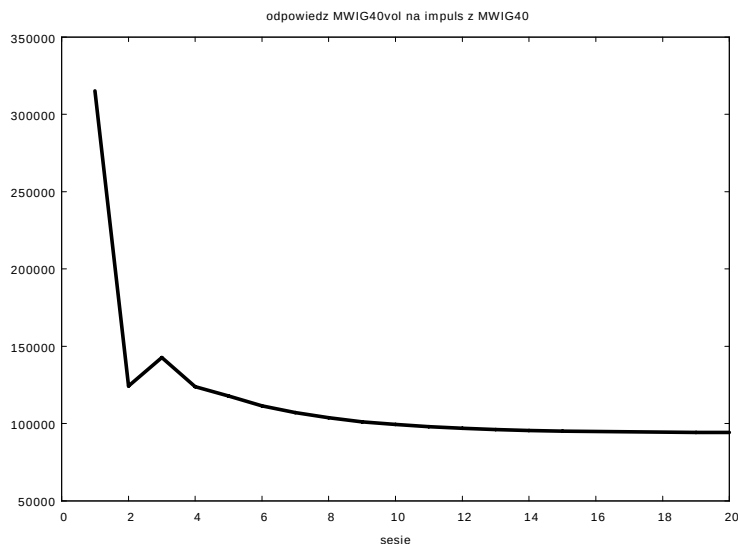
Na podstawie przeprowadzonych testów liniowej przyczynowości możemy stwierdzić, że zmiana cen indeksu przyczynia się do zmiany wolumenu głównie w okresie sukcesywnych wzrostów notowań. W pierwszym okresie powyższa zależność została potwierdzona dla wszystkich analizowanych indeksów. W okresie spadków natomiast testy nie wykazały takiej zależności tylko dla dwóch indeksów: WIG-MEDIA i WIG-TELEKOMUNIKACJA. Z kolei w okresie odbicia oraz dla danych z okresu 2003-2012 hipoteza zerowa została przyjęta dla 4-5 indeksów.

Pozostałe testowane hipotez zerowe wykazały brak przyczynowości między analizowanymi charakterystykami. Hipoteza zerowa mówiąca, że zmiany wolumenu nie są przyczyną zmian ceny indeksu w poszczególnych okresach została odrzucona dla co najwyżej dwóch indeksów. W okresie pierwszym były to indeksy MWIG40 i SWIG80, a w drugim okresie dla indeksu WIG-SPOŻYWCZE i SWIG80. Również dla danych z okresu 2003-2012 zmiany notowań przyczyniły się do zmian wolumenu tylko dla dwóch indeksów WIG PALIWA i SWIG80. W okresie odbicia natomiast taka zależność nie została potwierdzona dla żadnego indeksu. Zatem zmiana wolumenu przyczynia się do zmiany ceny tylko dla wybranych indeksów, jednak zależności tej nie można uogólnić.

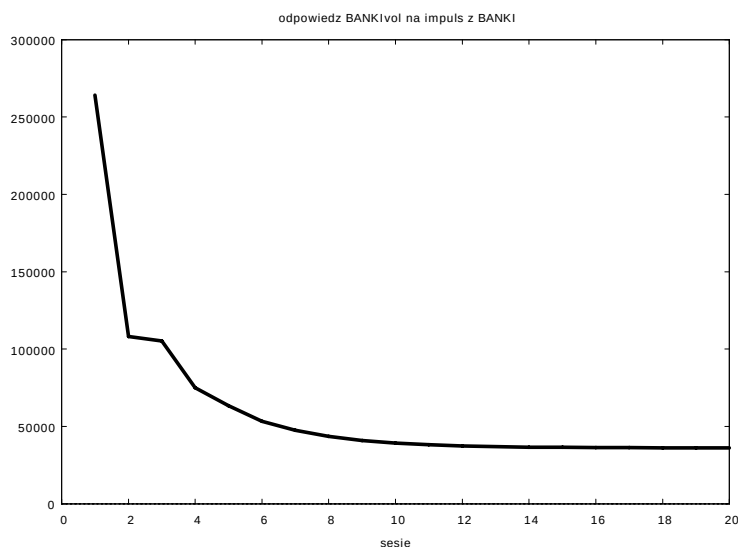
Przeprowadzone testy Grangera wykazały, że nie istnieje również przyczynowość między wolumenem a stopą zwrotu. Zmiana wolumenu przyczyniała się do zmian stóp zwrotu tylko w przypadku co najwyżej dwóch indeksów w poszczególnych okresach.

Z kolei hipoteza, że zmiany stóp zwrotu przyczyniają się do zmian wolumenu została potwierdzona tylko w pojedynczych przypadkach. W okresie wzrostu notowań dla indeksów WIG-DEVELOPERZY i WIG-MEDIA, w okresie spadków dla indeksu WIG-MEDIA, a w okresie odbicia tylko dla indeksu WIG-PALIWA. Natomiast dla danych 2003-2012 zmiany stóp zwrotu były przyczyną zmian wielkości obrotów w przypadku indeksów WIG-BUDOWLANE, WIG-PALIWA oraz WIG20.

Analiza przyczynowości pozwala ustalić istnienie zależności między ceną a wolumenem indeksów. Analizę tę uzupełniono wyznaczeniem funkcji odpowiedzi na impuls (IRF – Impulse Response Function), co pozwala na opis przebiegu zależności. Funkcji odpowiedzi na impuls określa zachowanie zmiennej X w odpowiedzi na zaburzenia w resztach zmiennej Y. Najczęściej przedstawiany jest wykres IRF, który obrazuje zmianę w czasie reakcji zmiennej objaśnianej na zaburzenia w wysokości jednego odchylenia standardowego reszt zmiennej objaśniającej. Funkcję odpowiedzi na impuls wyznaczono dla zależności zmiany ceny przyczyniają się do zmian wolumenu w pierwszym okresie. Analizowano zmiany wolumenu na impuls powodowany zmianami ceny. Na rys. 2, 3 przedstawione zostały przykładowe funkcje odpowiedzi na impuls dla indeksu MWIG40 oraz WIG-BANKI. Jak widać, w okresie wzrostu notowań, wraz z kolejnymi sesjami, reakcja wolumenu na zmiany cen zdecydowanie słabnie. Podobne wnioski otrzymano dla pozostałych indeksów.



Rys. 2. Funkcja odpowiedzi na impuls dla indeksu MWIG40



Rys. 3. Funkcja odpowiedzi na impuls dla indeksu BANKI

Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych analiz możemy stwierdzić, że na polskim rynku giełdowym zachodzi ścisły związek między ceną a wolumenem, jednak tylko w określonych warunkach. Wysokie wartości współczynnika korelacji uzyskane w pierwszym z analizowanych okresów wskazują na okres wysokiej efektywności polskiego rynku kapitałowego.

W celu ustalenia kierunku tej zależności przeprowadzony został test liniowej przyczynowości Grangera, który potwierdził hipotezę, że zmiana ceny przyczynia się do zmiany wolumenu. W okresie długotrwałych wzrostów notowań zależność taka została wykazana dla wszystkich analizowanych indeksów. W pozostałych okresach tylko w pojedynczych przypadkach nie stwierdzono tego rodzaju zależności. Nie możemy mówić o zależności dwukierunkowej, ponieważ zmiana wolumenu przyczynia się do zmiany ceny tylko w przypadku co najwyżej dwóch indeksów w każdym okresie. Przyczynowość zmian nie została stwierdzona dla indeksów, dla których wartość bezwzględna współczynnika korelacji cena-wolumen jest mniejsza niż 0,01. Z kolei w przypadku zależności wolumen-stopa zwrotu zjawisko przyczynowości zachodzi tylko w pojedynczych przypadkach, bez względu na charakter analizowanego okresu.

Literatura

- Assogbavi T., Schell J., Fagnisse S.: Equity Price-Volume Relationship on the Russian Stoc Exchange. „International Business & Economics Research Journal”, Vol. 6, No. 9.
- Bachman D., Choi J.J., Jeon B.N., Kopecky K.J.: Common Factors in International Stock Prices: Evidence from a Cointegration Study. „International Review of Financial Analysis” 1996, Vol. 5/1.
- Blume L.D., Easley D., O’Hara M.: Market Statistics and Technical Analysis: the Role of Volume. „Journal of Finance” 1994, Vol. 49, No. 1.
- Bohl M.M., Henke H.: Trading Volume and Stock Market Volatility: the Polish Case. „International Review of Financial Analysis” 2003, Vol. 12, No. 5.
- Campbell J.S., Grossman S., Wang J.: Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns. „Quarterly Journal of Economics” 1993, Vol. 108, No. 4.
- Charemza W.: Nowa ekonometria. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1997.
- Chen G., Firth M., Rui O.M.: The Dynamic Relation Between Stock Return, Trading Volume and Volatility. „Financial Review” 2001, Vol. 38, No. 3.
- Ciner C.: The Stock Price Volume Linkage on the Toronto Stock Exchange Before and After Automation. „Review of Quantitative Finance and Accounting” 2002, Vol. 19, No. 4.
- Dalkir M.: Revisiting Stock Market Index Correlations. „Finance Research Letters” 2009, Vol. 6/1.
- Gold S.C.: Price-volume Relationships and Stock Returns. „Journal of Accounting and Finance Research” 2004, No. 2.
- Henry O.T., MacKenzi M.: The Impact of Short Selling on the Price – Volume Relationship: Evidence from Hong Kong. Working Papers, 2004.
- Hiemstra C., Jones J.: Testing for Linear and Nonlinear Granger Causality in the Stock Price-volume Relation. „Journal of Finance” 1994, Vol. 49, No. 5.
- Lee C., Swaminathan B.: Price Momentum and Trading Volume. „Journal of Finance” 2000, Vol. 55, No. 5.
- Osińska M.: Ekonometria finansowa. PWE, Warszawa 2006.
- Rambeza J., Przekota G., Szczepańska-Przekota A.: Analiza powiązań między indeksami giełdowymi i wielkością obrotów na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. „Bank i Kredyt. Rynki i Instytucje Finansowe” 2008.
- Stickel S., Verrecchia R.: Evidence that Trading Volume Sustains Stock Price Changes. „Financial Analysts Journal” 1994, Vol. 50, No. 6.
- Suominen M.: Trading Volume and Information Revelation in Stock Markets. „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 2001, Vol. 36, No. 4.
- Wang J.: A Model of Competitive Trading Volume. „Journal of Political Economy” 1994, Vol. 102.
- Wójtowicz T.: Wpływ wielkości obrotów na ocenę warunkowej wariancji stop zwrotu akcji na GPW w Warszawie. Rynek Kapitałowy – skuteczne inwestowanie. Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2008, nr 10.

THE ANALYSIS OF RELATIONSHIP BETWEEN VOLUME AND STOCK'S INDEXES OF STOCK EXCHANGE IN WARSAW

Summary

To describe the situation on the stock's market we can use the stock's prices and volume. Using the relations between these two characteristics we can assess the functioning of the financial markets or we can conduct reactions of markets to the new information.

In this paper will be present results of the research of dependency between stock's prices or stock's return and volume for selected indexes from Stock Exchange in Warsaw. All dependencies will be analyze in periods when we can observe the long-term decreasing or increasing of quotations. In analyze we use selected econometrical and statistical tools.

Sławomir Jarek

Wyższa Szkoła Zarządzania Marketingowego i Języków Obcych w Katowicach

KONSTRUKCJA PORTFELA KONTRAKTÓW NA RÓŻNICE KURSOWE Z UWZGLĘDNIENIEM RYZyka RYNKOWEGO

Wprowadzenie

W pracy rozważany jest problem konstrukcji portfela kontraktów na różnice kursowe. O ile standardy kontraktów terminowych notowanych na giełdach są precyzyjnie określone i rozliczane są w taki sposób, aby inwestor w przypadku niekorzystnego dla niego rozwoju sytuacji na rynku miał możliwość uzupełnienia wymaganego depozytu zabezpieczającego, o tyle transakcje zawierane na rynku pozagiełdowym nie dają inwestorowi takiego komfortu i mogą skutkować natychmiastowym zamykaniem otwartych pozycji z istotnymi stratami dla inwestora. Otwarte pozycje na rynku pozagiełdowym są w sposób ciągły monitorowane w zakresie spełnienia wymaganego depozytu zabezpieczającego i inwestor jest odpowiedzialny za utrzymywanie aktywów w odpowiedniej wysokości. Inwestor tworząc portfel kontraktów na różnice kursowe stoi przed dylematem dotyczącym tego, jaką część środków pieniężnych przeznaczyć na otwarcie pozycji, a jaką z nich pozostawić jako zabezpieczenie przed ryzykiem rynkowym. Wiele z tych instrumentów jest narażonych na ryzyko walutowe¹. Odpowiednia wartość środków pieniężnych przeznaczonych na pokrycie niezrealizowanych strat ma zabezpieczyć przed nieskutecznym wezwaniem do uzupełnienia depozytu zabezpieczającego i niekorzystnym dla inwestora zamknięciem jego pozycji. W pracy omówiono różne mierniki ekspozycji na ryzyko rynkowe stosowane przez renomowane instytucje finansowe oferujące kontrakty na różnice kursowe na rynku pozagiełdowym.

¹ Ostatnio publikowanych jest wiele prac dotyczących miar służących do modelowania ryzyka walutowego. Przykładem są prace: (Hamel & Heyde, 2010) oraz (Acciaio & Penner, 2011). W pracy (Cheridito & Kupper, 2011) autorzy omawiają miary ryzyka walutowego związanego z procesami wyrażonymi w czasie dyskretnym.

Celem pracy jest próba określenia statystyki², która na podstawie wielkości posiadanych aktywów i zakładanej struktury portfela kontraktów na różnice kursowe ułatwi wyznaczenie liczby otwieranych pozycji w taki sposób, aby bieżąca wartość wszystkich aktywów, z uwzględnieniem obowiązku utrzymywania określonego depozytu zabezpieczającego, nie spadła poniżej określonego poziomu.

1. Kontrakty na różnice kursowe a kontrakty terminowe

Kontrakt na różnice kursowe (contract for difference – CFD) jest to taki rodzaj umowy pomiędzy kupującym a sprzedającym kontrakt, w którym sprzedający zobowiązuje się wypłacić kupującemu różnicę pomiędzy aktualną wartością w dniu wykonania kontraktu a wartością w dniu zawarcia kontraktu na określoną liczbę aktywów (instrumentem bazowym mogą być: akcje, indeksy, waluty, surowce itd). Jeśli ta różnica jest ujemna, wtedy kupujący wypłaca wartość bezwzględną tej różnicy sprzedającemu. W tego typu umowach nie następuje przekazanie praw do aktywów, których cena jest używana do rozliczenia kontraktu. Ponadto, w momencie ustalania kontraktu strony nie przekazują sobie środków niezbędnych do pełnego pokrycia otwieranych pozycji, a jedynie niewielką ich część, zwaną depozytem zabezpieczającym. Taki mechanizm umożliwia stosowanie dźwigni finansowej zwielokrotniającej uzyskiwane zyski i ponoszone straty.

Wartość depozytu zabezpieczającego CFD oferowanego na rynku pozagiełdowym (over the counter – OTC) jest określana jako ustalony procent bieżącej wartości kontraktu i stąd wartość depozytu ulega zmianie w trakcie trwania handlu danym instrumentem. Jeśli instrument bazowy jest dostępny na rynku globalnym, w związku z przesunięciem czasu w poszczególnych strefach czasowych, handel danym instrumentem może być możliwy od poniedziałku od godzin porannych w Sydney (czasu lokalnego) do piątku do zamknięcia rynku w godzinach popołudniowych czasu lokalnego w Nowym Jorku. W ciągu tygodnia, poza okresami świąt i dniami wolnymi od pracy, handel wybranymi instrumentami finansowymi jest możliwy nawet 24 h na dobę.

Mechanizm funkcjonowania CFD na OTC jest w pewien sposób zbliżony do kontraktów terminowych. W przypadku kontraktów terminowych, standard instrumentu finansowego jest precyzyjnie określony, a w szczególności ustalony

² W pracy (Acciaio & Penner, 2011) omówiono inne miary ryzyka niezbędne do określenia minimalnego depozytu zabezpieczającego. Autorki tej pracy posługują się wypukłymi miarami ryzyka bazującymi na kilku wariantach metodologii VaR omówionymi w pracy (Schied & Föllmer, 2002). Obie publikacje są dostępne w postaci elektronicznej na stronach Uniwersytetu Humbolda w Berlinie.

jest termin jego wygaśnięcia. W przypadku CFD oferowanych na OTC, standard instrumentu ustalany jest przez kreatora rynku (market maker – MM) i najczęściej nie określa się terminu wygaśnięcia danego kontraktu. Ponadto, wartość depozytu zabezpieczającego na rynku regulowanym zwykle określa się w momencie zamknięcia sesji i ta wartość obowiązuje w trakcie kolejnej sesji. W przypadku niekorzystnych dla inwestora zmian cen na rynku może się okazać, że wartość środków zgromadzonych na rachunku inwestora nie jest wystarczająca do pełnego pokrycia depozytu zabezpieczającego. W takiej sytuacji inwestor otrzymuje wezwanie do uzupełnienia depozytu (margin call – MC) i jest zobowiązany do niezwłocznego uzupełnienia aktywów. Jeśli inwestor nie będzie w stanie uzupełnić depozytu zabezpieczającego, jego pozycje zostaną zamknięte. Ponadto, w celu minimalizacji ryzyka niewywiązania się kontrahenta bazowego pomiędzy kolejnymi sesjami jest przekazywana pomiędzy stronami kontraktu. Większość dostawców CFD nie oferuje mechanizmu MC i po wystąpieniu na rachunku inwestora wysokiej stopy niezrealizowanej straty powodującej obniżenie aktywów poniżej określonego progu, MM zamyka pozycje inwestora realizując straty, które często są wysokie.

Na rynku regulowanym biuro maklerskie jest jedynie pośrednikiem w zawieraniu transakcji pomiędzy inwestorami. W przeciwieństwie do transakcji giełdowych, na OTC MM jest drugą stroną umowy. Na rynku pozagiełdowym jednym z kontrahentów jest MM i w związku z tym występuje oczywisty konflikt interesów, gdyż zysk inwestora jest stratą MM, a zysk MM stratą inwestora. Dla MM oferujących CFD tego rodzaju kontrakty przynoszą wymierne zyski, gdyż szacuje się, że jedynie jeden na pięciu inwestorów zamyka swe CFD bez straty.

2. Regulacje prawne

W Unii Europejskiej inwestorów instytucjonalnych obowiązują liczne wymagania związane z ograniczeniem ekspozycji na ryzyko rynkowe i operacyjne. Jedną z nich jest Nowa Umowa Kapitałowa³ opracowana przez Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego⁴. W odniesieniu do inwestorów detalicznych w niektórych krajach pojawiają się ograniczenia, które w założeniach mają chronić tych inwestorów przed zbyt wysoką ekspozycją na ryzyko rynkowe.

³ Inna nazwa to Basel II. W EU została wdrożona poprzez wydanie dyrektywy (Capital Requirements Directive: legislation in force, 2012). W pierwszym filarze do modelowania ryzyka rynkowego zalecane jest stosowanie wartości zagrożonej ryzykiem (VaR).

⁴ Ciekawą analizę zastosowania teorii wartości ekstremalnych (EVT) do modelowania ryzyka operacyjnego w kontekście Basel II zawarto w pracy (El-Gamal, Inanoglu, & Stengel, 2007).

W Polsce ostatnio Komisja Nadzoru Finansowego (KNF) wydaje liczne komunikaty dotyczące CFD. W komunikatach tych KNF zauważa, iż niski próg wejścia na rynek OTC sprawia, iż wielu inwestorów detalicznych wyraża swoje zainteresowanie tego rodzaju instrumentami. KNF informuje⁵, iż w Polsce w 2011 roku jedynie 18% klientów osiągnęło zysk z CFD, których instrumentem bazowym były waluty. Niedawno pojawiła się informacja⁶ KNF, w której zawarto ostrzeżenie przed zbyt małym zdywersyfikowaniem portfeli inwestorów obecnych na OTC. Ponadto, stwierdzono prowadzenie przez dostawców CFD intensywnych kampanii marketingowych mających na celu pozyskanie nowych klientów. KNF wspomina, że oprócz ryzyka rynkowego i walutowego inwestorzy powinni także właściwie skalkulować ryzyko kontrahenta, czyli możliwość niewywiązania się z umowy wobec klienta, który odnotował zysk, a także ryzyko płynności, które jest spowodowane małą liczbą transakcji i znacząco utrudnia korzystne zamknięcie otwartych pozycji. KNF podkreśla, iż CFD dostępne na OTC nie są wystandaryzowane i u różnych dostawców CFD mogą obowiązywać różne warunki transakcyjne dotyczące handlu tymi instrumentami.

Warto podkreślić, iż w Polsce wiele biur maklerskich oferuje CFD, a w ramach akcji promocyjnych i edukacyjnych publikuje pozycje zwarte zawierające podstawowe informacje dotyczące zawierania transakcji na OTC. Ciekawą pozycją jest książka⁷ wydana przez Dom Maklerski X-Trade Brokers (XTB), która była nieodpłatnie udostępniana uczestnikom konkursu inwestycyjnego organizowanego przez to biuro. Współautorem tej pozycji jest Mark Galant, twórca i prezes GAIN Capital group, firmy która jest właścicielem znanej marki FOREX.com. Analogiczne działania prowadzi Dom Maklerski Banku Ochrony Środowiska, który ostatnio wydał trzy książki popularyzujące zagadnienia związane z inwestycjami kapitałowymi: jedną⁸, której autorem jest współpracownik domu maklerskiego, oraz dwa⁹ tłumaczenia znanych w języku angielskim książek dotyczących tego rodzaju inwestycji.

Kontrakty na różnice kursowe oferowane w internetowych platformach transakcyjnych są stosunkowo nowymi instrumentami finansowymi. Ciekawym faktem jest to, że są autorzy¹⁰ prac dotyczących OTC, którzy uznają, iż powstaje niewiele publikacji dotyczących tworzenia, wyceny i efektywności CFD. Powstające prace jednak w niewielkim stopniu opisują mechanizmy konstrukcji portfela CFD, skupiając się na poszczególnych instrumentach.

⁵ Komisja Nadzoru Finansowego, 2012.

⁶ Komisja Nadzoru Finansowego, 2013.

⁷ M. Galant, B. Dolan: *Forex dla bystrzaków*. Gliwice 2012.

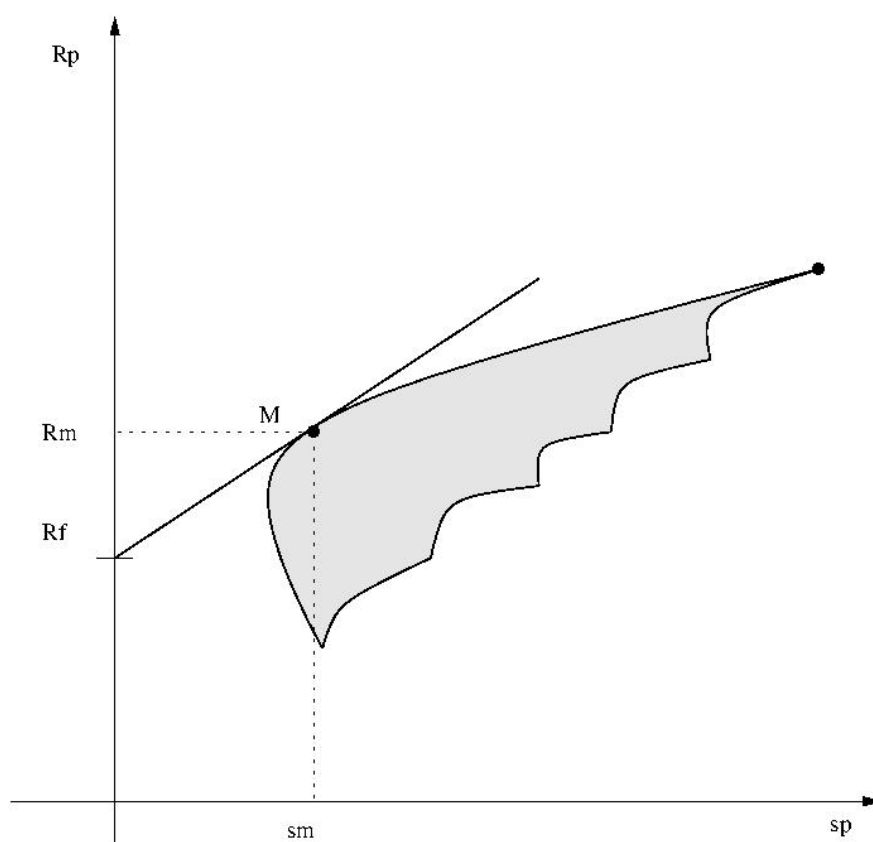
⁸ G. Zalewski: *Kontrakty terminowe i forex*. Warszawa 2010.

⁹ J.D. Schwager: *Czarodzieje rynku. Rozmowy z wybitnymi traderami*. Warszawa 2012; A. Laidi: *Międzynarodowa analiza kursów walutowych*. Warszawa 2012.

¹⁰ C. Brown, J. Dark & K. Davis: *Exchange Traded Contracts for Difference: Design, Pricing, and Effects*. „Journal Of Futures Markets” 2010, Vol. 30 (12), pp. 1108-1149.

3. Stopa zwrotu portfela CFD

Rozważając portfel CFD należy wspomnieć Model Wyceny Aktywów Kapitałowych (Capital Asset Pricing Model – CAPM¹¹). W tym modelu szczególną rolę pełni linia rynku kapitałowego (Capital Market Line – CML). Jest to półprosta mająca swój początek w punkcie odpowiadającym inwestycji pozbawionej ryzyka o oczekiwanej stopie zwrotu r_f i przechodząca przez punkt odpowiadający portfelowi rynkowemu o oczekiwanej stopie zwrotu r_m oraz odchyleniu standardowym σ_m .



Rys. 1. Linia rynku kapitałowego CML

¹¹ J. Lintner: The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. „Review of Economics and Statistics” 1965; J. Mossin: Equilibrium in a Capital Asset Market. „Econometrica” 1966; W. Sharpe: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium. „The Journal of Finance” 1964.

Przyjmujemy, iż spełniona jest zależność $r_m > r_f$. Zakładając, iż r_L oznacza oczekiwaną stopę zwrotu portfela, a σ_L oznacza odchylenie standardowe portfela, CML może być wyrażona w postaci równania (1). Przyjmujemy, że portfel $(\sigma_L; r_L)$ może być konstruowany z wykorzystaniem dźwigni finansowej

$$r_L = r_f + \frac{r_m - r_f}{\sigma_m} \sigma_L \quad (1)$$

gdzie: $\sigma_L \geq 0$.

Punkty na odcinku łączącym punkty r_f oraz M , o współrzędnych odpowiednio $(0; r_f)$ oraz $(\sigma_m; r_m)$, odzwierciedlają portfele zbudowane bez wykorzystania dźwigni finansowej. Portfele budowane z wykorzystaniem dźwigni finansowej są zobrazowane poprzez punkty na CML leżące powyżej punktu M o współrzędnych $(\sigma_m; r_m)$. Zwiększając ryzyko mierzone odchyleniem standardowym σ_L , zwiększamy jednocześnie oczekiwaną stopę zwrotu r_L . Obecnie dostawcy CFD oferują dźwignię finansową 50 : 1, 100 : 1, 200 : 1, a nawet niektórzy 400:1 (FOREX.com), potencjalnie umożliwiającą zwiększenie zysków. Jednakże używanie zbyt dużej wartości dźwigni finansowej znacząco zwiększa szanse poniesienia strat i utraty zainwestowanych środków. Straty te mogą być wyższe niż wielkość zainwestowanych środków. Przedmiotem pracy jest określenie statystyki umożliwiającej oszacowanie wartości progowej dla dźwigni finansowej użytej do konstrukcji portfela CFD.

Oznaczmy przez M wartość stopy depozytu i jednocześnie odwrotność dźwigni finansowej dla portfela CFD. W dalszej części tej pracy staramy się określić najmniejszą wartość stopy depozytu zabezpieczającego, która minimalizuje prawdopodobieństwo obniżenia wartości aktywów w portfelu CFD poniżej określonego poziomu.

Na rynku OTC rozliczając CFD uwzględnia się najlepsze oferty kupna i sprzedaży (oznaczane odpowiednio jako BID i ASK). W dalszej części pracy będziemy przyjmować, iż ceny otwarcia i rozliczenia CFD w danym momencie mogą być wyznaczone na jeden z następujących sposobów:

- średnia arytmetyczna ofert BID i ASK,
- oferty BID,
- ceny w jakich zawierane są transakcje.

Zakładamy, że dane dotyczące tych cen dostępne są w postaci szeregu czasowego OHLC (zawierającego cenę otwarcia – Open, cenę najwyższą – High, cenę najniższą – Low oraz cenę zamknięcia – Close, w danej jednostce czasu). Przez o_i będziemy oznaczać cenę otwarcia (wartość O z szeregu OHLC), a przez c_i cenę bieżącą i-tego CFD. Opierając się na tych oznaczeniach zdefiniowano

w (2) stopę zwrotu z i -tego CFD otwierając pozycję długą, a w (3) otwierając pozycję krótką. Badając wartości ekstremalne będziemy za c_i podstawiać odpowiednie wartości H w przypadku pozycji krótkich i L w przypadku pozycji długich z szeregu OHLC

$$r_i = \frac{c_i - o_i}{o_i} = \frac{c_i}{o_i} - 1 \quad (2)$$

Powyższa zależność może być również interpretowana jako przyrost względny lub pomniejszony o 1 indeks prosty ceny i -tego instrumentu

$$r_i = \frac{o_i - c_i}{o_i} = 1 - \frac{c_i}{o_i} \quad (3)$$

Niech $s_i = 1$ oznacza pozycję krótką, a $s_i = -1$ pozycję długą i -tego CFD. Wtedy możemy połączyć zależności (2) i (3) otrzymując (4)

$$r_i = \frac{s_i(c_i - o_i)}{o_i} \quad (4)$$

Oznaczmy przez u_i ilość jednostek i -tego CFD. Możemy teraz zdefiniować wartość otwarcia i -tego CFD jako zależność (5)

$$OV_i = u_i * o_i \quad (5)$$

Suma wartości otwarcia wszystkich pozycji portfela OV wyznacza wartość zdefiniowaną jako zależność (6). Wartość OV pełni kluczową rolę w konstrukcji portfela CFD i jej wartość w stosunku do środków pieniężnych B zdeponowanych na rachunku inwestora służy do określenia stopy depozytu M . Im wartość OV jest mniejsza w stosunku do B , tym stopa depozytu M jest większa, a to oznacza mniejszą dźwignię finansową użytą przez inwestora

$$OV = \sum OV_i \quad (6)$$

Znając wartości otwarcia OV_i poszczególnych pozycji portfela możemy podać zależność (7) określającą udział x_i w portfelu poszczególnych CFD

$$x_i = \frac{OV_i}{OV} = \frac{u_i * o_i}{OV} \quad (7)$$

Zakładamy, iż wartości x_i znane są przed rozpoczęciem konstrukcji portfela akcji. Problem wyznaczenia liczby poszczególnych kontraktów u_i może być wyznaczony z zależności (7) i zapisany jako (8)

$$u_i = \frac{x_i * OV}{o_i} \quad (8)$$

Na podstawie powyższych oznaczeń można wyznaczyć stopę zwrotu¹² portfela CFD w postaci (9)

$$r_p = \sum x_i r_i = \sum x_i \frac{s_i(c_i - o_i)}{o_i} = \sum x_i * s_i \frac{c_i}{o_i} - \sum x_i * s_i \quad (9)$$

4. Stopa zwrotu portfela wykorzystującego efekt dźwigni finansowej

Dążąc do oszacowania minimalnej stopy depozytu zabezpieczającego dla portfela CFD należy zdefiniować bieżącą wartość i-tego kontraktu. Wielkość tę zdefiniowano w równaniu (10)

$$PV_i = u_i * c_i \quad (10)$$

Suma wszystkich wartości bieżących CFD daje nam wartość bieżącą otwartych pozycji (11) w portfelu kontraktów

$$PV = \sum PV_i \quad (11)$$

Wartość wszystkich depozytów zabezpieczających związanych z portfelem CFD jest równa sumie depozytów zabezpieczających poszczególne kontrakty. W zależności od ryzyka związanego z danym instrumentem bazowym, dystrybutor CFD definiuje wartość stopy depozytu zabezpieczającego znajdującą się w przedziale $0 \leq M_i \leq 1$. Iloczyn stopy depozytu oraz wartości bieżącej i-tego kontraktu wyznacza wielkość depozytu zabezpieczającego wymaganego przez dystrybutora CFD. Wartość wszystkich depozytów zabezpieczających wymaganych przez MM wyrażonych w funkcji wartości otwarcia portfela zawiera zależność (12)

$$\begin{aligned} MU &= \sum PV_i * M_i = \sum u_i * c_i * M_i = \sum \frac{x_i * OV}{o_i} c_i * M_i = \\ &= OV \sum \frac{c_i}{o_i} x_i * M_i \end{aligned} \quad (12)$$

Po otwarciu i-tej pozycji pojawia się ekspozycja na ryzyko. Jest ona tym większa, im więcej jednostek u_i zawiera dany kontrakt znajdujący się w portfelu inwestora oraz od bieżącej różnicy pomiędzy ceną bieżącą a ceną otwarcia i-tego

¹² Warto podkreślić, iż ta zależność nie uwzględnia dźwigni finansowej. Zależność uwzględniającą wysokość dźwigni finansowej została określona równaniem (23).

kontraktu. Sumę wszystkich niezrealizowanych zysków i strat kontraktów w portfelu zawiera równanie (13). Zależność ta określa również związek pomiędzy niezrealizowanymi zyskami i stratami portfela a wartością otwarcia wszystkich pozycji i stopą zwrotu portfela CFD. Wartość niezrealizowanych zysków i strat jest równa wartości otwarcia wszystkich pozycji OV pomnożonej przez bieżącą wartość stopy zwrotu portfela r_p

$$\begin{aligned}
 URP\&L &= \sum u_i * s_i * (c_i - o_i) = \\
 &= \sum \frac{o_i}{o_i} u_i * s_i (c_i - o_i) = \\
 &= \frac{OV}{OV} \sum u_i * o_i \frac{s_i (c_i - o_i)}{o_i} = \\
 &= OV \sum \frac{u_i * o_i}{OV} r_i = OV \sum x_i * r_i = OV * r_p
 \end{aligned} \tag{13}$$

Kluczową rolę w dalszych rozważaniach pełnić będzie wartość netto aktywów NAV . Jest ona równa sumie wartości gotówki B zarejestrowanej na koncie inwestora oraz wartości niezrealizowanych zysków i strat $URP\&L$. Wartość netto aktywów została podana w zależności (14)

$$NAV = B + URP\&L = B + \sum u_i * s_i (c_i - o_i) = B + OV * r_p \tag{14}$$

Konstruując portfel kontraktów na różnice kursowe inwestor powinien określić początkową stopę depozytu zabezpieczającego $M_0 \geq 0$, która wyznacza wielkość depozytu zabezpieczającego dla wartości otwarcia OV wszystkich pozycji CFD. Wielkość depozytu zabezpieczającego w momencie otwarcia wszystkich pozycji nie może być mniejsza od wartości gotówki B zdeponowanej na koncie inwestora, co określa zależność (15). Dzieląc obustronnie zależność (15) przez dodatnią wartość otwarcia OV otrzymujemy warunek (17) na maksymalną wartość dźwigni finansowej oraz jednocześnie minimalną wartość stopy depozytu zabezpieczającego

$$B \geq OV * M_0 \tag{15}$$

W warunku (17) użyto stopę depozytu zabezpieczającego dla portfela CFD zdefiniowaną w (16)

$$M = \frac{B}{OV} \tag{16}$$

Warunek (17) powinien być spełniony w momencie tworzenia portfela kontraktów

$$M \geq M_0 \quad (17)$$

Po utworzeniu portfela CFD inwestor powinien zapewnić aktywa w takiej wysokości NAV , aby w każdym momencie były one nie mniejsze niż aktualnie wymagany depozyt zabezpieczający MU , co zostało zdefiniowane w warunku (18)

$$NAV \geq MU \quad (18)$$

Dzieląc zależność (18) obustronnie przez wartość depozytu zabezpieczającego MU otrzymujemy inną postać tego warunku w postaci nierówności (19)

$$\frac{NAV}{MU} \geq 100\% \quad (19)$$

Jeśli nierówność (19) jest spełniona, to inwestor ma możliwość otwierania nowych pozycji. W przeciwnym przypadku niezrealizowane straty pochłaniają aktywa netto. Wielu dostawców CFD dopuszcza możliwość, aby prawa strona warunku (19) była mniejsza niż 100%, jednak nie mniejsza niż pewna wartość progowa SOP , co ma swoje odzwierciedlenie w warunku (20). Jeśli ten warunek nie jest spełniony, MM może zamknąć wszystkie pozycje lub zamykać stratne pozycje do momentu, aż będzie spełniony warunek (19). W takiej sytuacji następuje realizacja strat inwestora. Wielkość progu SOP zdefiniowana jest przez dostawcę CFD i w praktyce zwykle wynosi 30% (platformy transakcyjne MT4, np. BOSSAFX i XTb), 50% (Dukascopy i Oanda) lub nawet 100% (FOREX.com)

$$\frac{NAV}{MU} \geq SOP \quad (20)$$

Warunek (20) bywa określany przez różnych dostawców CFD także w postaci (21) lub (22)

$$\frac{MU}{NAV} \leq \frac{1}{SOP} \quad (21)$$

Warunek w postaci (21) jest stosowany m.in. w Dukascopy, a w postaci (22) w OANDA

$$\frac{MU}{NAV} SOP \leq 100\% \quad (22)$$

Znając bieżącą wartość aktywów netto NAV oraz początkową wartość inwestycji B , zdefiniowano w zależności (23) stopę zwrotu r_L z portfela wykorzystującego efekt dźwigni finansowej. W zależności tej wykazano, iż r_L można uzyskać mnożąc wartość dźwigni finansowej $\frac{1}{M}$ przez stopę zwrotu portfela CFD r_p . W kolejnym rozdziale pracy zostanie zaproponowana metoda oszacowania maksymalnej wartości dźwigni finansowej $\frac{1}{M}$

$$r_L = \frac{NAV - B}{B} = \frac{B + OV * r_p - B}{B} = \frac{OV}{B} r_p = \frac{1}{M} r_p \quad (23)$$

5. Stopa depozytu zabezpieczającego dla portfela

Mnożąc obustronnie warunek (20) przez wartość depozytu zabezpieczającego MU oraz podstawiając do tak otrzymanej zależności wartości MU i NAV zdefiniowane we wzorach (12) i (14), otrzymujemy warunek (24)

$$B + OV * r_p \geq SOP * OV \sum \frac{c_i}{o_i} * x_i * M_i \quad (24)$$

Dzieląc obustronnie warunek (24) przez wartość otwarcia OV , która zawsze przyjmuje wartości nieujemne otrzymujemy warunek (25)

$$\frac{B}{OV} + r_p \geq SOP \sum \frac{c_i}{o_i} * x_i * M_i \quad (25)$$

Przenosząc na drugą stronę (25) stopę zwrotu r_p oraz podstawiając zależność (16) otrzymujemy warunek (26), który został wcześniej zdefiniowany w postaci (17). Wcześniej prawa strona warunku (26) została oznaczona jako M_0

$$M \geq \sum \frac{c_i}{o_i} * x_i * M_i * SOP - r_p \quad (26)$$

W zależności (27) rozwinięto r_p na podstawie (9) i wydzielono dwie główne składowe. Pierwsza z nich związana jest ze zmiennymi losowym cen otwarcia i cen bieżących poszczególnych CFD. Ta składowa wiąże z ilorazem cen i -tych kontraktów, także wartości ustalone takie, jak

- udział x_i i -tego CFD w portfelu,
- stopę depozytu zabezpieczającego i -tego CFD M_i ,
- rodzaj otwieranej pozycji s_i ,
- poziom SOP .

Druga składowa związana jest wyłącznie z wartościami ustalonymi, a mianowicie jest to suma iloczynów udziału x_i oraz rodzaju otwieranej pozycji s_i i-tego CFD

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \sum \frac{c_i}{o_i} * x_i * M_i * SOP - r_p = \\
 &= \sum \frac{c_i}{o_i} * x_i * M_i * SOP - \left(\sum x_i * s_i * \frac{c_i}{o_i} - \sum x_i * s_i \right) = \\
 &= \sum \frac{c_i}{o_i} * x_i * (M_i * SOP - s_i) + \sum x_i * s_i
 \end{aligned} \tag{27}$$

W celu oszacowania¹³ wartości oczekiwanej M_0 należy wcześniej oszacować najmniej korzystne warunkowe wartości oczekiwane c_i uwzględniając fakt, iż te wartości nie występują jednocześnie w tej samej jednostce czasu. Dysponując powyższymi statystykami można zastosować wybraną metodę pomiaru ryzyka¹⁴ i oszacować poszukiwane warunkowe wartości oczekiwane na podstawie wartości zagrożonej ryzykiem VaR lub teorii wartości ekstremalnych – EVT. Na podstawie zależności (13) oraz (23) możemy wyznaczyć wartość straty w postaci zależności (28)

$$URP\&L = \frac{1}{M_0} * r_p * B \tag{28}$$

Starając się oszacować wielkość straty przyjmujemy iż $URL = -URP\&L = -\frac{1}{M_0} * r_p * B$.

Zakładamy, iż wartość zagrożona jest określona przez zależność (29), w której przyjęto określony rozkład oraz dystrybuantę URP&L

$$\begin{aligned}
 VaR_\alpha(URL) &= \inf_{\{m \in R\}} \{m: Pr(URL \leq m) \leq 1 - \alpha\} = \\
 &= \inf_{\{m \in R\}} \{m: F_{URL}(m) \geq \alpha\} = F_{URL}^{-1}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{29}$$

¹³ Założyliśmy wcześniej, iż $M_0 \geq 0$. Jeśli wartość statystyki M_0 nie spełnia tego warunku, to wtedy przyjmujemy że $M_0 = \sup\{M_i\}$.

¹⁴ Ostatnio pojawia się coraz więcej głosów krytykujących VaR. Interesujące porównanie VaR i EVT można znaleźć w pracy C. Marinelli, S. D'Addona & S.T. Rachev: A Comparison of Some Univariate Models For Value-At-Risk And Expected Shortfall. „International Journal of Theoretical & Applied Finance” 2007, Vol. 10 (6), s. 1043-1075; Bardzo ciekawe zastosowanie VaR jako miary ryzyka walutowego omówiono w pracy A.H. Hamel & F. Heyde: Op. cit.

Aby oszacować wartość zagrożoną ryzykiem m , możemy od obu stron pierwszej nierówności w (30) odjąć wartość oczekiwaną URL, a następnie podzielić obustronnie tę nierówność przez odchylenie standardowe tej zmiennej. Otrzymujemy w ten sposób funkcję dystrybuanty zmiennej $\frac{m - \overline{URL}}{\sigma}$, która cechuje się zerową wartością oczekiwaną oraz wariancją wynoszącą jeden.

$$\begin{aligned} Pr(URL \leq m) &= Pr(URL - \overline{URL} \leq m - \overline{URL}) = \\ &= Pr\left(\frac{URL - \overline{URL}}{\sigma} \leq \frac{m - \overline{URL}}{\sigma}\right) = F\left(\frac{m - \overline{URL}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

Przyjmując określony rodzaj rozkładu statystyki $\frac{m - \overline{URL}}{\sigma}$ można przekształcić zależność (30) w nierówność (31)

$$\frac{m - \overline{URL}}{\sigma} \geq F^{-1}(\alpha) \quad (31)$$

Niestety, w praktyce pojawiają się trudności z właściwym określeniem rozkładu¹⁵ zmiennej losowej określającej straty (grube ogony rozkładu) i dlatego można zastosować nierówność Czebyszewa w postaci (32)

$$P(|m - \overline{URL}| \geq k * \sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (32)$$

Z warunku (31) wyznaczono wartość zagrożoną m otrzymując zależność (33). Jednocześnie wartość $\frac{-m}{r_p * B}$ określa największą dopuszczalną wartość dźwigni finansowej, której inwestor nie powinien przekraczać

$$m \geq \overline{URL} + \sigma * F^{-1}(\alpha) \quad (33)$$

Wyznaczając z zależności (15) wartość otwarcia OV oraz podstawiając za M_0 wartość $\frac{r_p * B}{-m}$ otrzymujemy warunek (34)

$$OV \leq \frac{B}{M_0} = -\frac{m}{r_p} \quad (34)$$

¹⁵ Wnioskując o wartości oczekiwanej można oczywiście posłużyć się centralnym twierdzeniem granicznym, z którego można wysnuć wniosek iż rozkład statystyki wartości oczekiwanej cechuje się rozkładem normalnym. Pojawia się jednak problem minimalnej wielkości próby, na podstawie której stawiamy tego rodzaju hipotezy.

Rozwijając w (34) za m zależność (33) otrzymujemy warunek (35), który określa, jaką część środków B można wykorzystać do otwarcia pozycji i zarezerwować jako depozyt zabezpieczający w taki sposób, aby prawdopodobieństwo zdarzenia, iż wartość aktywów netto jest mniejsza od wartości progowej SOP było jak najmniejsze

$$OV \leq - \frac{\overline{URL} + \sigma * F^{-1}(\alpha)}{r_p} \quad (35)$$

Podsumowanie

W pracy podjęto próbę zdefiniowania warunków, jakie powinny być uwzględnione w procesie tworzenia portfela kontraktów na różnice kursowe tak, aby ryzyko zmniejszenia wartości aktywów netto inwestora poniżej wymaganego progu było jak najmniejsze. Problem ten związany był z próbą określenia górnej granicy wartości dźwigni finansowej, którą można zastosować w trakcie budowy takiego portfela. Wyniki pracy wymagają przeprowadzenia eksperymentów numerycznych i symulacji komputerowych na podstawie danych historycznych w celu zweryfikowania otrzymanych zależności.

Literatura

- Brown C., Dark J. & Davis K.: Exchange Traded Contracts for Difference: Design, Pricing, and Effects. „Journal Of Futures Markets” 2010, Vol. 30 (12).
- Capital Requirements Directive: Legislation in Force. 2012. Retrieved Marzec 16, 2013. European Commission. http://ec.europa.eu/internal_market/bank/regcapital/legislation_in_force_en.htm
- El-Gamal M., Inanoglu H. & Stengel M.: Multivariate Estimation for Operational Risk with Judicious Use of Extreme Value Theory. „Journal of Operational Risk” 2007, Vol. 2 (1).
- Hamel A.H. & Heyde F.: Duality for Set-Valued Measures of Risk. „SIAM J. FINANCIAL MATH.” 2010, Vol. 1.
- Komisja Nadzoru Finansowego. 2013. Komunikat do klientów firm inwestycyjnych w sprawie zróżnicowania instrumentów finansowych na rynku forex. Retrieved Marzec 16, 2013. http://www.knf.gov.pl/Images/instrumenty_na_rynku_forex_tcm75-29721.pdf
- Komisja Nadzoru Finansowego. 2012. Komunikat w sprawie wyników osiągniętych przez inwestorów na rynku forex. Retrieved Marzec 16, 2013. from http://www.knf.gov.pl/Images/KNF_forex_18_04_2012_tcm75-30319.pdf

- Lintner J.: The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. „Review of Economics and Statistics” 1965.
- Marinelli C., D’Addona S. & Rachev S.T.: A Comparison of Some Univariate Models For Value-At-Risk And Expected Shortfall. „International Journal Of Theoretical & Applied Finance” 2007, Vol. 10 (6).
- Mossin J.: Equilibrium in a Capital Asset Market. „Econometrica” 1966.
- Sharpe W.: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium. „The Journal of Finance” 1964.

THE CONSTRUCTION OF THE PORTFOLIO OF CONTRACTS FOR DIFFERENCES WITH RESPECT TO MARKET RISK

Summary

In this paper is considered the issue of the portfolio of contracts for differences (CFD). As far as the standards of contracts traded on the stock exchanges are precisely defined and treated in such a manner that the investor in case of adverse developments for him on the market have the ability to complete the required margin, so transactions on the over the counter (OTC) market do not give an investor such the comfort and can result in an immediate closing open positions with significant losses for the investor. Open CFD positions offered in the OTC market are continuously monitored in terms of fulfilment of the required security deposit (margin) and the investor is responsible for maintaining the necessary assets to fully cover the market risk. Creating a CFD portfolio investor faces a dilemma, what proportion of the funds allocated to the opening position, and which of them leave as a hedge against market risks. The Problem is so complex that many of the CFD is exposed to currency risk. Appropriate funds intended to cover unrealised losses has to secure against a ineffective margin call to supplement the security deposit and unfavourable for the investor closing his position. The work discusses the various measures of market risk exposure used by reputable financial institutions offering contracts on exchange differences on the over the counter market. In addition, proposed several measures to support the portfolio structure of the CFD, taking into account market risk.

Bartłomiej Lach

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

SELEKCJA AKCJI Z WYKORZYSTANIEM MODELI DYSKRYMINACYJNYCH ORAZ OPTYMALIZACJI PODZIAŁU ZBIORU OBIEKTÓW

Wprowadzenie

Wybór odpowiedniej spółki oraz właściwego momentu zakupu jej akcji stanowi podstawowe zadanie stojące przed każdym podmiotem inwestującym środki w akcje. Korzystając z technik analizy rynku kapitałowego inwestor ma możliwość podejmowania decyzji inwestycyjnych pozwalających zwiększać szansę efektywnego inwestowania na giełdzie. Celem przeprowadzanego badania było ustalenie zasadności oraz skuteczności stosowania analizy dyskryminacyjnej jako narzędzia analizy fundamentalnej w procesie doboru spółek do portfela inwestycyjnego. Przeprowadzone badanie powinno umożliwić odpowiedź na pytanie, czy analiza dyskryminacyjna wsparta wykorzystaniem iteracyjnej metody optymalizacji podziału zbioru obiektów może stanowić narzędzie skutecznie wspomagające proces podejmowania decyzji inwestycyjnych. Zadaniem szacowanych modeli dyskryminacyjnych był dobór spółek do portfela inwestycyjnego w taki sposób, aby uzyskiwana przez portfel stopa zwrotu była wyższa niż średnia stopa wszystkich badanych spółek w danym okresie. Podczas konstrukcji modeli dyskryminacyjnych dodatkowo wykorzystano iteracyjną metodę optymalizacji podziału zbioru obiektów – metodę k-średnich. Została ona wykorzystana na etapie definiowania populacji, z których mogą pochodzić kolejne obserwacje. Metoda k-średnich została zastosowana w celu poprawy zdolności poprawnego klasyfikowania przez modele dyskryminacyjne, zwiększając tym samym szansę opracowania skutecznego narzędzia prognostycznego.

W badaniu poprawności klasyfikacji skonstruowanych modeli dyskryminacyjnych wykorzystano obiekty próby uczącej, na podstawie których skonstruowano modele dyskryminacyjne oraz obiekty próby testującej, których nie uwzględniano podczas budowania modeli.

1. Metodologiczne podstawy przeprowadzonego badania

Podstawowym narzędziem wykorzystanym w badaniu jest analiza dyskryminacyjna. Służy ona klasyfikowaniu obiektów na podstawie opisujących je cech diagnostycznych. Każdy obiekt opisywany jest przez zestaw cech wyrażonych za pomocą k -wymiarowego wektora zmiennych niezależnych. Główna idea analizy polega na rozdzieleniu zbioru wszystkich badanych obiektów, stanowiących próbę $\Omega = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$ na rozłączne populacje, z których mogły te obiekty pochodzić: $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ ¹. Populacje odpowiadają wariantom zmiennej zależnej, mierzonej na skali nominalnej (możliwe n wariantów zmiennej). Podzielony w ten sposób zbiór wszystkich dostępnych obiektów służy do wyznaczenia funkcji dyskryminacyjnej, stanowiącej następnie narzędzie „rozpoznające” obiekty nieznanego pochodzenia. Dodatkową korzyścią uzyskiwaną przez badacza stosującego analizę dyskryminacyjną jest wiedza odnośnie do stopnia wpływu poszczególnych zmiennych niezależnych na możliwość rozróżnienia obiektów pochodzących z różnych populacji. Informować o tym mogą współczynniki stojące przy poszczególnych zmiennych funkcji dyskryminacyjnych². Konstruowana funkcja umożliwia klasyfikację obiektu na podstawie wartości jego cech diagnostycznych do jednej z ustanowionych populacji $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$.

Przed rozpoczęciem konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej niezbędna jest weryfikacja odpowiednich założeń stawianych zmiennym diagnostycznym, opisującym obiekty badania. Wybór zastosowanych w modelu zmiennych powinien być merytorycznie uzasadniony, a wnoszone przez nie informacje powinny ujmować najbardziej istotne własności analizowanego zjawiska³. Zmienne diagnostyczne nie powinny być ze sobą skorelowane oraz powinny posiadać rozkład normalny. W praktyce, brak spełnienia założenia normalności często nie jest traktowany jako powód do zaprzestania dalszego badania.

Na podstawie funkcji gęstości populacji, z których mogą pochodzić obiekty badania oraz założeń bayesowskiej reguły klasyfikacyjnej⁴ liniową funkcję dyskryminacyjną w przypadku populacji obiektów π_0 i π_1 można zapisać następująco⁵

¹ D. Hadasik: Upadłość przedsiębiorstw w Polsce i metody jej prognozowania. Akademia Ekonomiczna, Poznań 1998, s. 97.

² M. Walesiak: Metody analizy danych marketingowych. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996, s. 103.

³ E. Nowak: Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno-gospodarczych. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1990, s. 23.

⁴ Więcej informacji o bayesowskiej regule klasyfikacyjnej można znaleźć w pracy D. Hadasik: Op. cit.

⁵ Ibid., s. 115.

$$D(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{a}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1),$$

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1)^T \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_1),$$

gdzie:

$\mathbf{a}$ – wektor współczynników liniowej funkcji dyskryminacyjnej,

$\mathbf{a}_0$ – wyraz wolny liniowej funkcji dyskryminacyjnej,

$\mathbf{x}$ – wektor cech obiektu,

Σ – macierz wariancji-kowariancji dla zmiennych opisujących obiekty,

$\boldsymbol{\mu}_0$ ($\boldsymbol{\mu}_1$) – wektor wartości oczekiwanych zmiennych w populacjach π_0 (π_1).

W przypadku równej liczby obiektów próby uczącej pochodzących z obu populacji reguła klasyfikacyjna zakłada, że obiekt należy zaklasyfikować do populacji pierwszej (π_0) w sytuacji, kiedy wartość funkcji dyskryminacyjnej dla obiektu jest większa od zera. Wartości ujemne funkcji dyskryminacyjnej wskazują na przynależność obiektu do populacji drugiej (π_1)⁶. W przypadku występowania większej liczby klas, z których mogą pochodzić obiekty badania, zasada postępowania jest inna. W takiej sytuacji wyznaczane są funkcje klasyfikacyjne dla każdej populacji z osobna. Klasyfikacja odbywa się na drodze wyznaczenia wartości wszystkich funkcji klasyfikacyjnych dla każdego obiektu z osobna. Analizowany obiekt zaklasyfikowany zostaje do populacji, dla której odpowiadająca jej funkcja klasyfikacyjna wskazała najwyższą wartość⁷.

Drugą ważną metodą wykorzystaną w badaniu była metoda k-średnich umożliwiająca optymalny podział zbioru obiektów. Metoda ta służy do skorygowania w sposób iteracyjny wstępnego i z góry znanego podziału zbioru obiektów. Zadaniem metody k-średnich jest przemieszczenie poszczególnych obiektów pomiędzy klasami w taki sposób, aby suma odległości wszystkich obiektów od środków ciężkości klas, do których przynależą była jak najmniejsza. W sytuacji, kiedy po kolejnej iteracji żaden obiekt nie zmieni swojego położenia, algorytm kończy swoje działanie, a aktualnie ustanowiony podział uznawany jest za optymalny. W jednej z najczęściej wykorzystywanych wersji metody k-średnich, opracowanej przez J.A. Hartingana, odległość obiektów mierzona jest za pomocą miary euklidesowej⁸.

⁶ G.J. McLachlan: Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004.

⁷ Elektroniczny podręcznik pakietu STATISTICA. Analiza dyskryminacyjna. www.statsoft.pl

⁸ T. Grabiński: Metody taksonometrii. Akademia Ekonomiczna, Kraków 1992, s. 125.

2. Wykorzystany materiał badawczy

W badaniu wykorzystano dane dotyczące działalności spółek pochodzących z trzech branż: budowlanej, informatycznej oraz bankowej. Do konstrukcji oraz testowania modeli dyskryminacyjnych wykorzystano łącznie 61 spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych (25 – branża budowlana, 20 – branża informatyczna, 16 – banki). Każdą ze spółek opisuje zestaw wskaźników finansowych wyznaczanych na podstawie kwartalnych sprawozdań finansowych począwszy od pierwszego kwartału 2008 roku. Ostatnim kwartałem uwzględnionym w badaniu był kwartał drugi 2012 roku. Próbę uczącą stanowiło czternaście kwartałów (ostatnim był drugi kwartał 2011 roku), a testującą – cztery (od trzeciego kwartału 2011 roku do drugiego kwartału 2012 roku).

Wskaźniki finansowe dobierane były tak, aby w możliwie pełny sposób opisywały sytuację finansowo-majątkową przedsiębiorstw. Kierując się tą zasadą w zbiorze zmiennych diagnostycznych znalazły się wskaźniki opisujące różne aspekty kondycji finansowo-majątkowej przedsiębiorstw (rentowność, zadłużenie, płynność finansowa, sprawność działania)⁹. Wstępny zbiór cech diagnostycznych został ograniczony ze względu na niespełnienie przez niektóre z nich wymagań stawianych przez analizę dyskryminacyjną. Ostatecznie zbiór cech diagnostycznych stanowiło 6 wskaźników finansowych: płynność bieżąca, wskaźnik zadłużenia kapitału własnego, udział kapitału własnego w aktywach trwałych, rentowność aktywów ogółem, wskaźnik rotacji aktywów ogółem oraz wskaźnik źródeł finansowania inwestycji. W celu zapewnienia porównywalności obserwacji pochodzących z różnych okresów zastosowana została standaryzacja wartości wskaźników finansowych w poszczególnych okresach. Skutkiem zastosowania normalizacji jest utrata informacji o bezwzględnej wielkości wskaźników w okresach na rzecz wartości wskazujących na poziom wskaźnika na tle innych spółek w danym okresie¹⁰.

Drugą grupą danych opisujących obiekty badania są stopy zwrotu akcji spółek uwzględnionych w badaniu. Stopy zwrotu wyliczane były dla trzymiesięcznych okresów po publikacji kwartalnych sprawozdań finansowych. Spółki notowane na GPW w Warszawie po zakończeniu każdego kwartału mają 45 dni na opublikowanie okresowego sprawozdania finansowego¹¹. Sprawo-

⁹ M. Jerzemowska: Analiza finansowa w zarządzaniu przedsiębiorstwem. Tom 1. Red. L. Bednarski i T. Waśniewski. FRR w Polsce, Warszawa 1996, s. 321.

¹⁰ B. Lach: Metody i zastosowania badań operacyjnych w gospodarce, finansach i szkolnictwie wyższym. Red. W. Sikora. Uniwersytet Ekonomiczny, Poznań 2013 (w druku).

¹¹ Ustawa o rachunkowości z dnia 29 kwietnia 1994 r. Dz.U. 2009, nr 152, poz. 1223.

zдания finansowe poszczególnych przedsiębiorstw nie są zatem publikowane tego samego dnia. W badaniu przyjęto dla uproszczenia jeden wspólny termin publikacji sprawozdań finansowych przez wszystkie analizowane spółki. Dniem tym jest trzydziesty dzień po zakończeniu kwartału, którego dotyczyło sprawozdanie finansowe. Przykładowy okres obserwacji cen akcji po opublikowaniu sprawozdań finansowych za pierwszy kwartał 2008 roku rozpoczyna się 01.05.2008 roku, a kończy 30.07.2008 roku.

3. Warianty oraz założenia badania empirycznego

Celem stosowania modeli dyskryminacyjnych w badaniu jest typowanie spółek, które z punktu widzenia fundamentalnego dają szansę na wypracowania ponadprzeciętnych stóp zwrotu w okresach po publikacji kwartalnych sprawozdań finansowych. W badaniu empirycznym wykorzystano zebrane dane finansowe dotyczące 61 spółek pochodzących z trzech różnych branż. Zróżnicowany rodzaj działalności spółek w poszczególnych branżach może mieć wpływ na odmienne kształtowanie się niektórych wskaźników finansowych utrudniając tym samym ich porównywalność. Z tego powodu badanie przeprowadzono w dwóch wariantach. Pierwszy wariant zakłada brak rozróżnienia spółek ze względu na branżę, z której pochodzą. W przypadku pierwszego wariantu, przy konstrukcji oraz testowaniu modeli dyskryminacyjnych korzysta się z próby, do której należą spółki pochodzące z wszystkich trzech analizowanych branż. Drugi z wariantów uwzględnia przynależność obiektów do jednej z trzech badanych branż. Związane jest to z konstrukcją oddzielnych modeli dyskryminacyjnych dla każdej branży z osobna. Wariant drugi zakłada więc konieczność oddzielenia od siebie spółek prowadzących odmienny rodzaj działalności, który może wpływać na odmienne kształtowanie się wskaźników finansowych spółek w poszczególnych branżach.

Działalność przedsiębiorstw niektórych branż podlega silnemu oddziaływaniu czynników sezonowych. Przykładem tego może być branża budowlana, w której bardziej korzystnym okresem dla działalności przedsiębiorstw jest druga połowa roku¹². Ze względu na możliwość występowania czynników sezonowych mogących wpływać na działalność przedsiębiorstw oraz na kształtowanie

¹² Wpływ czynnika sezonowego w branży budowlanej można zaobserwować na wykresie prezentującym dynamikę produkcji budowlano-montażowej w Polsce w ostatnich latach. Strona internetowa Głównego Urzędu Statystycznego. www.stat.gov.pl/gus

się niektórych wskaźników finansowych, w badaniu zdecydowano się na budowę odrębnych modeli dyskryminacyjnych, dla każdego z czterech kwartałów. Budowa oddzielnych modeli ma na celu spowodowanie lepszego dopasowania współczynników funkcji dyskryminacyjnych do wskaźników finansowych spółek w poszczególnych kwartałach. Możliwa jest bowiem sytuacja, w której o sukcesie spółki na giełdzie po opublikowaniu sprawozdania finansowego za pierwszy kwartał decydują w największym stopniu np. wskaźniki związane z zadłużeniem spółki, a po publikacji sprawozdań za kwartał trzeci – wskaźniki rentowności. Zastosowanie odrębnych modeli dyskryminacyjnych dla każdego kwartału z osobna powinno umożliwić wykrycie takich zależności. W efekcie, do typowania spółek, które z punktu widzenia fundamentalnego powinny uzyskiwać ponadprzeciętne stopy zwrotu w okresie po publikacji sprawozdań finansowych konieczne jest wykorzystanie jednego z czterech modeli. Podejście to dotyczy obu przyjętych wariantów badania.

Istotnym elementem badania jest wykorzystanie metody iteracyjnej optymalizacji podziału zbioru obiektów – metody k-średnich na etapie definiowania populacji, do których klasyfikowane są obiekty badania. Pamiętając o konstrukcji funkcji dyskryminacyjnej należy zauważyć, że jakość modelu oraz zdolność do prawidłowego przyporządkowywania obiektów do populacji zależy w dużej mierze od poziomu istotności różnic obiektów w poszczególnych populacjach. Ze względu na przyjęte cechy diagnostyczne obiekty pochodzące z obu populacji powinny istotnie różnić się między sobą, ułatwiając w ten sposób poprawną klasyfikację. W tym właśnie celu zastosowana została metoda k-średnich, która ma podzielić obiekty próby uczącej w taki sposób, aby te znajdujące się wewnątrz grupy były możliwie podobne oraz znacząco różniły się od obiektów spoza grupy.

Obiekty znajdujące się w poszczególnych grupach dla podziałów na 4, 5 oraz 6 grup zbadane zostały pod kątem uzyskiwanych stóp zwrotu na giełdzie w okresie po publikacji kwartalnych sprawozdań. Dla każdej grupy wyznaczana była średnia wartość zestandaryzowanych stóp zwrotu z akcji spółek należących do poszczególnych grup. Wartość ta określała, jak średnio biorąc prezentowały się stopy spółek tej grupy na tle wszystkich obiektów w danym kwartale. Grupa, której średnia wartość zestandaryzowanych stóp zwrotu w modelu dla kwartału była dodatnia i najwyższa stanowiła w badaniu populację spółek atrakcyjnych¹³.

¹³ Warunkiem uznania grupy za atrakcyjną była również wystarczająco reprezentatywna liczba znajdujących się w niej obiektów, zbliżona do średniej liczebności obiektów w ustanowionych grupach.

Obiekty z pozostałych grup, wobec przyjętych założeń, nie leżą w polu zainteresowania inwestorów. Podział z wykorzystaniem metody k-średnich przeprowadzony został w przypadku obu wariantów badania. Pierwszemu wariantowi badania, w którym nie dokonywano rozróżnienia obiektów ze względu na branżę, z której pochodziły spółki odpowiada tabela 1. W drugim wariantcie badania, dla każdej branży konstruowane były oddzielne modele dyskryminacyjne. Ustawianie populacji obiektów należało zatem wykonać dla każdej z trzech branż z osobna. W tabeli 2 przedstawiono wyniki postępowania dla branży informatycznej.

Tabela 1

Grupy obiektów pochodzących z trzech branż po optymalizacji podziału metodą k-średnich

Podział na k grup		Model dla kwartału							
k:		I		II		III		IV	
		Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i	Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i	Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i	Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i
4	1	0,343	5	-0,041	55	-0,249	12	0,134	56
	2	-0,107	159	0,062	152	0,237	39	-0,768	12
	3	0,191	57	0,93	1	-0,042	119	-0,88	6
	4	0,367	12	-0,325	25	-0,411	3	0,042	157
	Razem:		233		233		173		231
5	1	-0,046	137	0,118	104	0,014	153	-0,725	4
	2	-0,267	30	0,93	1	-0,183	10	0,086	81
	3	0,191	57	-0,041	85	-0,411	3	-0,880	6
	4	0,347	5	-0,302	10	2,95	1	-0,166	96
	5	0,442	4	-0,306	33	-0,328	6	0,377	44
	Razem:		233		233		173		231
6	1	0,442	4	-0,189	19	0,047	18	-0,981	3
	2	0,347	5	-0,041	55	-0,175	7	0,377	44
	3	0,191	57	0,93	1	2,95	1	-0,880	6
	4	-0,466	17	-0,841	7	0,005	138	-0,135	92
	5	0,032	21	-0,098	1	-0,411	3	0,096	80
	6	-0,055	129	0,073	150	-0,328	6	-0,705	6
	Razem:		233		233		173		231

Tabela 2

Grupy obiektów branży informatycznej po optymalizacji podziału
metodą k-średnich

Podział na k grup		Model dla kwartału							
k:		I		II		III		IV	
		Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i	Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i	Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i	Średnia, zestandaryzowana stopa zwrotu w grupie	N _i
4	1	-0,458	6	0,162	4	-0,149	6	0,145	28
	2	-0,192	30	-0,016	31	0,147	14	-0,052	35
	3	-0,264	6	-0,041	31	-0,133	23	1,132	3
	4	0,241	36	0,09	12	0,126	15	-0,471	12
	Razem:		78		78		58		78
5	1	-0,359	21	-0,067	18	0,147	14	-0,164	2
	2	0,254	27	0,121	9	-0,149	6	0,084	32
	3	-0,458	6	-0,146	27	0,148	14	-0,929	7
	4	0,147	2	0,157	23	-0,208	1	0,013	34
	5	0,144	22	0,446	1	-0,132	23	1,13	3
	Razem:		78		78		58		78
6	1	-0,359	21	0,539	5	0,052	13	-0,016	2
	2	0,097	5	0,446	1	0,405	3	-0,327	2
	3	0,114	18	-0,073	14	-0,105	12	0,427	2
	4	0,180	18	-0,095	24	-0,165	12	-0,929	7
	5	0,105	14	-0,021	23	0,187	12	0,0129	34
	6	0,147	2	0,061	11	-0,149	6	0,191	31
	Razem:		78		78		58		78

Średnia zestandaryzowanych stóp zwrotu wyższa od zera wskazuje na grupy obiektów, które uzyskiwały w poszczególnych kwartałach stopy zwrotu wyższe niż portfel odniesienia. W przypadku pierwszego wariantu badania portfel odniesienia składał się z akcji wszystkich badanych spółek należących do trzech analizowanych branż w poszczególnych kwartałach od 2008 do 2011 roku. W przypadku drugiego wariantu, portfel odniesienia składał się ze wszystkich akcji spółek danej branży uwzględnionych w badaniu. Należy podkreślić, że dodatnia wartość średniej zestandaryzowanych stóp zwrotu nie musi odpowiadać zyskowi z portfela. Stopy ponadprzeciętne w niektórych kwartałach mogą oznaczać tylko ograniczanie strat w stosunku do portfela odniesienia.

Wysokie i dodatnie wartości średnich zestandaryzowanych stóp zwrotu wskazują na grupy, których obiekty średnio biorąc uzyskiwały stopy zwrotu wyższe niż średnia stopa w odpowiednim kwartale. Wyróżnione grupy stanowią zatem populacje w modelach dyskryminacyjnych, do których klasyfikowane są obiekty przejawiające zdolności do uzyskiwania ponadprzeciętnych stóp zwrotu. Warto przypomnieć, że w przypadku modeli dyskryminacyjnych z liczbą populacji większą od 2, do klasyfikowania obiektów wykorzystuje się funkcje klasyfikacyjne Fishera. W przypadku modelu dla pierwszego kwartału branży informatycznej (tabela 2), wyznaczonych zostało zatem 5 funkcji klasyfikacyjnych, z których każda odpowiada jednej z 5 grup obiektów, pośród których znajduje się grupa obiektów uznanych za atrakcyjne (grupa 2). Obiekt nieznanego pochodzenia zostanie zaklasyfikowany do tej grupy jeżeli z wyliczonych dla niego wartości wszystkich pięciu funkcji klasyfikacyjnych, największą okaże się wartość funkcji nr 2. Klasyfikacja obiektu do którejkolwiek z pozostałych wskazuje na brak istotnej siły fundamentalnej spółki w świetle przyjętych założeń.

4. Konstrukcja i weryfikacja modeli dyskryminacyjnych

Na podstawie ustanowionego podziału obiektów próby uczącej skonstruowane zostały modele dyskryminacyjne. W przypadku pierwszego wariantu badania były to cztery modele (odpowiadające kolejnym kwartałom) dla wszystkich spółek bez względu na branżę z której pochodziły. Drugi wariant zakładał rozróżnienie spółek ze względu na branżę. Konstruowanych było w tym przypadku dwanaście modeli dyskryminacyjnych odpowiadających trzem branżom, po cztery dla każdego kwartału. W tabeli 3 przedstawiono współczynniki funkcji klasyfikacyjnych Fishera odpowiadających populacjom spółek atrakcyjnych w modelach dla branży informatycznej. Należy podkreślić, że w tabeli znajdują się tylko współczynniki funkcji klasyfikujących obiekty, od których oczekuje się ponadprzeciętnych stóp zwrotu w trzymiesięcznym okresie po publikacji sprawozdań.

Tabela 3

Współczynniki funkcji klasyfikacyjnych Fishera odpowiadających populacjom spółek atrakcyjnych w modelach dla branży informatycznej

Zmienna w modelu	Model dla kwartału			
	I	II	III	IV
Płynność bieżąca	-0,375	0,575	0,523	-0,406
Wskaźnik zadłużenia kapitału własnego	1,680	-2,984	0,215	-0,931
Udział kapitału własnego w aktywach trwałych	-0,839	-0,448	-1,412	-2,119
Rentowność aktywów ogółem	11,787	1,107	0,036	0,146
Wskaźnik rotacji aktywów ogółem	0,967	-1,606	-2,224	-0,496
Wskaźnik źródeł finansowania inwestycji	-2,246	0,847	0,637	-0,316
Stała w modelu	-7,992	-2,223	-2,381	-2,400

Współczynniki funkcji odpowiadające zmiennym w modelach informują o kierunku i sile wpływu poszczególnych cech diagnostycznych na przynależność obiektów do grupy spółek, od których oczekuje się ponadprzeciętnych stóp zwrotu. Pamiętając o przeprowadzonej na wstępie standaryzacji wartości wskaźników finansowych możliwa jest interpretacja współczynników funkcji klasyfikacyjnych w modelach dla poszczególnych kwartałów. Analizując tabelę 3 można stwierdzić, że spółki branży informatycznej uzyskujące w pierwszym kwartale roku możliwie wysoką i ponadprzeciętną wartość wskaźnika rentowność aktywów (wartość zestandaryzowana większa od zera) zwiększają swoją szansę zaklasyfikowania do grupy obiektów atrakcyjnych. Ponadto, szansa ta wzrastała również dla spółek, które finansowały swoją działalność długiem w większym stopniu niż średni poziom na rynku w okresie. W pierwszym kwartale na wzrost wartości funkcji klasyfikacyjnej odpowiadającej populacji obiektów leżących w polu zainteresowania inwestorów ma również wpływ możliwie niski i nieprzekraczający średniego poziomu w okresie wskaźnik źródeł finansowania inwestycji. Warto również zwrócić uwagę na to, że w poszczególnych kwartałach różne wskaźniki finansowe mogą w różny sposób oraz z różnym natężeniem wpływać na przynależność obiektu do grupy obiektów atrakcyjnych inwestycyjnie. Uzasadnione wydaje się zatem podejście, w którym ze względu na występowanie czynników sezonowych oddziałujących na działalność przedsiębiorstw skonstruowane zostały odrębne modele dyskryminacyjne dla kwartałów.

Zastosowanie metody iteracyjnej optymalizacji podziału zbioru obiektów spowodowało utworzenie grup obiektów wyraźnie różniących się między sobą ze względu na zestaw opisujących je cech diagnostycznych. Z tego powodu odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obiektów próby uczącej w modelach dla kwartałów był bardzo wysoki, a globalne współczynniki klasyfikacji w modelach oscylowały w granicach 95%. Analiza dyskryminacyjna nie jest zatem bezpośrednio odpowiedzialna za wysoki poziom poprawności klasyfikacyjnej. Stanowi ona jednak ważne narzędzie podczas procesu klasyfikacji oraz pozwala wyciągnąć wnioski wynikające z interpretacji współczynników funkcji klasyfikacyjnych. Bardzo wysoki odsetek poprawnie zaklasyfikowanych obiektów próby uczącej zarówno w przypadku pierwszego, jak i drugiego wariantu badania nie gwarantuje sukcesu podczas testowania modeli na danych próby testującej. Modele zweryfikowane zostaną na obiektach próby testującej podczas symulowania strategii inwestycyjnej w ostatniej części badania.

5. Symulacja strategii inwestycyjnej na podstawie opracowanych modeli

Ostatnim etapem przeprowadzonego badania jest symulacja strategii inwestycyjnych skonstruowanych na podstawie modeli dyskryminacyjnych zbudowanych dla dwóch wariantów badania. Strategie zakładają zakup do portfela inwestycyjnego akcji spółek typowanych przez modele dyskryminacyjne w poszczególnych kwartałach. W przypadku pierwszego wariantu badania, w każdym kwartale stosuje się jeden, wspólny dla wszystkich spółek model dyskryminacyjny. Wskazane przez niego spółki w kwartale stanowią portfel inwestora. W drugim wariantcie, w każdym kwartale spółki typowane są za pomocą trzech modeli – dla każdej branży z osobna. Wskazane przez modele spółki znajdują się w portfelu przez trzy miesiące do czasu publikacji sprawozdań finansowych za kolejny kwartał. Wartościowy udział akcji w portfelu jest równy dla wszystkich spółek, a stopa zwrotu z portfela jest równa średniej stóp zwrotu wszystkich walorów znajdujących się w portfelu w danym kwartale. Symulacja przeprowadzona została na danych próby uczącej oraz testującej (wyróżnione okresy 2011 roku oraz 2012).

Tabela 4

Wyniki strategii inwestycyjnej opartej na modelach dyskryminacyjnych
bez rozróżnienia branż, z których pochodzą spółki

Rok	Portfel	Kwartał				Średnia
		I	II	III	IV	
2008	Strategia	-2,8%	0,6%	-21,0%	2,7%	-5,1%
	Odniesienia	-11,8%	-6,4%	-14,6%	-0,2%	-8,2%
2009	Strategia	20,8%	13,8%	10,0%	4,4%	12,2%
	Odniesienia	9,9%	10,3%	1,0%	7,9%	7,3%
2010	Strategia	-4,1%	6,9%	2,2%	1,3%	1,6%
	Odniesienia	-4,8%	6,1%	0,6%	2,9%	1,2%
2011	Strategia	-13,1%	-25,0%	-16,9%	-7,6%	-15,7%
	Odniesienia	-9,4%	-22,8%	-8,6%	2,2%	-9,6%
2012	Strategia	-14,7%	22,2%			3,7%
	Odniesienia	-19,9%	11,4%			-4,3%
Średnia	Strategia	-2,8%	3,7%	-6,4%	0,2%	-0,7% (-2,7%)
	Odniesienia	-7,2%	-0,3%	-5,4%	3,2%	

Tabela 5

Wyniki strategii inwestycyjnej opartej na modelach dyskryminacyjnych
z rozróżnieniem branż, z których pochodzą spółki

Rok	Portfel	Kwartał				Średnia
		I	II	III	IV	
2008	Strategia	-9,7%	-2,0%	-13,3%	7,4%	-4,4%
	Odniesienia	-11,8%	-6,4%	-14,6%	-0,2%	-8,2%
2009	Strategia	9,8%	11,9%	0,9%	10,9%	8,4%
	Odniesienia	9,9%	10,3%	1,0%	7,9%	7,3%
2010	Strategia	-5,7%	13,2%	9,4%	1,9%	4,7%
	Odniesienia	-4,8%	6,1%	0,6%	2,9%	1,2%
2011	Strategia	-4,6%	-17,6%	-8,4%	17,9%	-3,2%
	Odniesienia	-9,4%	-22,8%	-8,6%	2,2%	-9,6%
2012	Strategia	-13,9%	12,9%			-0,5%
	Odniesienia	-19,9%	11,4%			-4,3%
Średnia	Strategia	-4,8%	3,7%	-2,9%	9,5%	1,0% (-2,7%)
	Odniesienia	-7,2%	-0,3%	-5,4%	3,2%	

W zdecydowanej większości okresów stopy zwrotu uzyskiwane przez inwestora stosującego strategię były wyższe niż stopy z portfela odniesienia, w którego skład wchodziło 61 spółek. Należy jednak zauważyć, że tylko w przypadku drugiego wariantu badania udało się średnio biorąc uzyskiwać wyższą stopę we wszystkich czterech kwartałach. Również symulacja przeprowadzona na spółkach próby testującej wskazuje, że w przypadku odrębnych modeli dla poszczególnych kwartałów, w każdym z testowanych okresów portfel strategii uzyskał stopę zwrotu wyższą niż odpowiadający portfel odniesienia. W prawym narożniku tabel 4 oraz 5 znajdują się wartości średnich stóp zwrotu uzyskanych przez portfele strategii oraz portfele odniesienia (wartości w nawiasach) dla wszystkich badanych lat oraz kwartałów. W obu wariantach badania średnie stopy zwrotu w kolejnych latach, jak i kwartałach były wyższe w przypadku portfeli strategii. Porównując wyniki uzyskane w obu wariantach należy stwierdzić, że wyższe średnie stopy zwrotu odpowiadały podejściu, w którym konstruowano oddzielne modele dla branż.

Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonego badania wskazują na możliwość stosowania analizy dyskryminacyjnej jako narzędzia analizy fundamentalnej wspomagającej proces podejmowania decyzji inwestycyjnych. Wskazują na to przede wszystkim wyniki uzyskanego w przypadku drugiego z dwóch przyjętych wariantów badania, w którym zbiór spółek atrakcyjnych stanowiły spółki typowane przez odrębne modele dyskryminacyjne skonstruowane dla poszczególnych branż. Przeprowadzona dla tego wariantu symulacja strategii inwestycyjnej wskazała na możliwość uzyskiwania wyższych stóp zwrotu przez portfel strategii opartej na modelach dyskryminacyjnych niż portfel odniesienia. Konstruowane odrębne modele dyskryminacyjne dla przedsiębiorstw prowadzących podobny rodzaj działalności gospodarczej umożliwiło skuteczniejsze typowanie spółek uzyskujących ponadprzeciętne stopy zwrotu w okresie po publikacji kwartalnych sprawozdań finansowych. Należy pamiętać, że wyższe stopy zwrotu nie musiały zawsze oznaczać zysku. W niektórych kwartałach mogły wskazywać jedynie na możliwość ograniczania strat.

Należy podkreślić istotne znaczenie zastosowania metody iteracyjnej optymalizacji podziału zbioru obiektów, która wykorzystana była na etapie definiowania populacji, z których mogły pochodzić obiekty badania. O skuteczności strategii inwestycyjnej skonstruowanej dla drugiego wariantu badania świadczą

przede wszystkim wyniki testów przeprowadzonych na danych, z których nie korzystano podczas oszacowywania parametrów modeli. Z tego powodu, przed wykorzystaniem w praktyce strategii inwestycyjnej wskazane jest jej dokładne przetestowanie na odpowiednio dużej liczbie obiektów próby testującej.

Literatura

- Elektroniczny podręcznik pakietu STATISTICA. Analiza dyskryminacyjna. www.statsoft.pl
- Grabiński T.: Metody aksonometrii. Akademia Ekonomiczna, Kraków 1992.
- Hadasik D.: Upadłość przedsiębiorstw w Polsce i metody jej prognozowania. Akademia Ekonomiczna, Poznań 1998.
- McLachlan G.J.: Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2004.
- Jerzemowska M.: Analiza finansowa w zarządzaniu przedsiębiorstwem. Tom 1. Red. L. Bednarski i T. Waśniewski. FRR w Polsce, Warszawa 1996.
- Nowak E.: Metody taksonomiczne w klasyfikacji obiektów społeczno-gospodarczych. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1990.
- Sierpińska M., Jachna T.: Ocena przedsiębiorstwa według standardów światowych. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
- Ustawa o rachunkowości z dnia 29 kwietnia 1994 r. Dz.U. 2009, nr 152, poz. 1223.
- Walesiak M.: Metody analizy danych marketingowych. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

STOCK SELECTION USING DISCRIMINANT ANALYSIS AND CLUSTER ANALYSIS

Summary

This article consists primarily of discriminant analysis, which could be used as a tool to guide the investors to choose appropriate shares. Author used data on the financial situation of various companies from three various branches. The objects in the examination were described through set of financial indicators. The purpose of the discriminative models was to select the companies that had a higher return rate than average in a three month period after publishing quarterly financial reports. The use of the k-means method amends quality of the discriminant model improving the chance to figure out an effective prognostic tool.

Elżbieta Majewska

Robert Jankowski

Uniwersytet w Białymstoku

ZASTOSOWANIE UOGÓLNIONEGO WSPÓŁCZYNNIKA GINIEGO DO POMIARU RYZYKA SPÓŁEK WCHODZĄCYCH W SKŁAD INDEKSU WIG20

Wprowadzenie

Klasyczna analiza portfeli inwestycyjnych opiera się na dwóch podstawowych charakterystykach papierów wartościowych: oczekiwanej stopie zwrotu oraz ryzyku mierzonym odchyleniem standardowym stóp zwrotu. Na początku lat 80. XX wieku Shlomo Yitzhaki zaproponował, by zastąpić odchylenie standardowe średnią różnicą Giniego. Wielkości te mają bowiem wiele analogicznych własności. To jednak nie jedyny argument przemawiający za stosowaniem tej alternatywnej miary zmienności stóp zwrotu. Jak wiadomo, teoria portfeli inwestycyjnych zbudowana przez Markowitza i Sharpe'a opiera się na dość rygorystycznych założeniach. W szczególności wymaga, by stopy zwrotu rozważanych walorów miały rozkład normalny lub funkcje użyteczności inwestorów były kwadratowe. W praktyce warunki te często nie są spełnione. W takim przypadku analizę można opierać na kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu i minimalizacji średniej różnicy Giniego. Skonstruowane w ten sposób portfele są efektywne w sensie kryteriów dominacji stochastycznej.

Uogólnieniem średniej różnicy Giniego jest współczynnik, który dodatkowo uwzględnia poziom awersji do ryzyka inwestora. W pracy zostaną przedstawione podstawowe własności uogólnionego współczynnika Giniego jako miary ryzyka, a także bazujących na nim miar ryzyka systematycznego i korelacji pomiędzy papierami wartościowymi. Zasadniczym celem jest natomiast prezentacja wyników badań empirycznych dotyczących oszacowań tychże wartości dla spółek z indeksu WIG20.

1. Własności uogólnionego współczynnika Giniego

Mianem uogólnionego współczynnika Giniego określa się rodzinę miar zmienności wywodzących się ze średniej różnicy Giniego, która w kontekście pomiaru ryzyka inwestycyjnego wyznaczana jest najczęściej jako podwojona kowariancja pomiędzy losową stopą zwrotu z papieru wartościowego, a dystrybuantą jej rozkładu. Uogólniony współczynnik Giniego określa natomiast następujący wzór¹

$$\Gamma(\nu) = \int_a^b [1 - F(r)] dr - \int_a^b [1 - F(r)]^\nu dr = \bar{r} - a - \int_a^b [1 - F(r)]^\nu dr \quad (1)$$

gdzie:

$F(r)$ – dystrybuanta rozkładu losowej stopy zwrotu r , przy czym $F(a) = 0$ dla pewnego $a > 0$ oraz $F(b) = 1$ dla pewnego $b < +\infty$,

$\bar{r}$ – oczekiwana stopa zwrotu.

W praktyce wygodniej jest posługiwać się nieco inną postacią wzoru (1)

$$\Gamma(\nu) = -\nu \operatorname{cov}\{r, [1 - F(r)]^{\nu-1}\}, \quad \nu \in [1, +\infty) \quad (2)$$

Łatwo przy tym zauważyć, że jeśli $\nu = 2$, to $\Gamma(\nu)$ jest średnią różnicą Giniego.

$\Gamma(\nu)$ można traktować jako średnią ważoną kowariancję pomiędzy stopą zwrotu r i wielkością $1 - F(r)$ w potęgze $\nu - 1$. Parametr ν uwzględnia poziom awersji do ryzyka inwestora. Im większa wartość parametru, tym większa niechęć do ryzyka inwestora. Wartość $\nu = 1$ odpowiada inwestorowi neutralnemu wobec ryzyka² ($\Gamma(1) = 0$), natomiast przypadek $\nu \rightarrow +\infty$ oznacza, że inwestor nie dopuszcza ryzyka na żadnym poziomie i tym samym dąży do osiągnięcia relatywnie niskiego, ale całkowicie bezpiecznego zysku.

Własności zdefiniowanego wzorem (2) współczynnika są następujące:

1. $\Gamma(\nu)$ jest wielkością nieujemną, nieograniczoną z góry i niemalejącą względem ν .

2. Dla całkowitych wartości ν zachodzi

$$\Gamma(\nu) = \bar{r} - E[\min(r_1, r_2, \dots, r_\nu)].$$

¹ H. Shalit, S. Yitzhaki: Mean-Gini, Portfolio Theory and the Pricing of Risky Assets. „Journal of Finance” 1984, No. 39(5), s. 1461.

² W rozumieniu dualnej teorii użyteczności Yaari’ego, H. Shalit, S. Yitzhaki: The Mean-Gini Efficient Portfolio Frontier. „The Journal of financial Research” 2005, Vol. XXVIII, No. 1, s. 62.

3. Jeżeli $r_2 = cr_1$ i c jest dowolną stałą, to $\Gamma_2(\nu) = |c|\Gamma_1(\nu)$.

4. Jeżeli $r_2 = c + r_1$, to $\Gamma_2(\nu) = \Gamma_1(\nu)$ ³.

Można również pokazać, że jeżeli r_1, r_2 są losowymi stopami zwrotu z dwóch walorów, to nierówność

$$[\bar{r}_1 - \Gamma_1(\nu)] - [\bar{r}_2 - \Gamma_2(\nu)] \geq 0, \quad \nu \geq 1 \quad (3)$$

stanowi warunek konieczny stochastycznej dominacji r_1 nad r_2 w sensie kryteriów dominacji stochastycznej pierwszego i drugiego rzędu. Dodatkowo, jeżeli dystrybuanty tychże stóp zwrotu przecinają się co najwyżej raz, to (3) stanowi warunek wystarczający stochastycznej dominacji r_1 nad r_2 . Ponadto, jeśli $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$, to warunek wystarczający przyjmuje postać

$$[\bar{r}_1 - \Gamma_1(\nu)] - [\bar{r}_2 - \Gamma_2(\nu)] > 0, \quad \nu \geq 1 \quad (4)$$

2. Uogólniony współczynnik Giniego a ryzyko systematyczne

Jedną z podstawowych zależności wykorzystywanych w analizie instrumentów finansowych jest tzw. linia charakterystyczna, która opisuje związek pomiędzy stopą zwrotu z danego waloru (r_i) i stopą zwrotu z portfela rynkowego (r_m), czyli⁴

$$r_i = \alpha_i + \beta_i \cdot r_m + \varepsilon_i \quad (5)$$

gdzie ε_i oznacza składnik losowy, natomiast β_i to współczynnik beta określający ryzyko systematyczne (rynkowe) papieru wartościowego. Dla rynku pozostającego w równowadze prawdziwa jest ponadto prosta liniowa zależność pomiędzy tym ryzykiem a oczekiwaną stopą zwrotu z waloru ($\bar{r}_i$) zwana linią rynku papierów wartościowych

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_m - r_f)\beta_i \quad (6)$$

gdzie:

r_f – stopa zwrotu wolna od ryzyka,

$\bar{r}_m$ – oczekiwana stopa zwrotu z portfela rynkowego.

³ H. Shalit, S. Yitzhaki: Mean-Gini, Portfolio Theory..., op. cit., s. 1461.

⁴ R.A. Haugen: Teoria nowoczesnego inwestowania. WIG-Press, Warszawa 1996, s. 59-60.

Jeżeli r_m oraz ε nie są ze sobą skorelowane i mają rozkłady normalne, to oszacowanie parametru β_i uzyskuje się klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. Jednakże w praktyce założenia te nie zawsze są spełnione i wówczas niezbędne jest stosowanie innych metod estymacji, np. metody zmiennych instrumentalnych. Alternatywą może być również wyznaczenie estymatora opartego na uogólnionym współczynniku Giniego postaci⁵

$$\beta_i(\nu) = \frac{\text{cov}\{r_i, [1 - F_m(r_m)]^{\nu-1}\}}{\text{cov}\{r_m, [1 - F_m(r_m)]^{\nu-1}\}} = \theta_{im}(\nu) \cdot \frac{\Gamma_i(\nu)}{\Gamma_m(\nu)} \quad (7)$$

gdzie

$$\theta_{im}(\nu) = \frac{\text{cov}\{r_i, [1 - F_m(r_m)]^{\nu-1}\}}{\text{cov}\{r_i, [1 - F_i(r_i)]^{\nu-1}\}} \quad (8)$$

a $\Gamma_m(\nu)$ oznacza uogólniony współczynnik Giniego portfela rynkowego.

Można przy tym pokazać, że jeśli stopy zwrotu mają rozkład normalny, to $\beta_i(\nu) = \beta_i$ dla dowolnego ν . Ponadto, analizując rynek inwestorów o jednakowym poziomie awersji do ryzyka można określić odpowiednik linii rynku papierów wartościowych postaci

$$\bar{r}_i = r_f + (\bar{r}_m - r_f)\beta_i(\nu), \quad \nu > 1 \quad (9)$$

Oznacza to, że możliwa jest konstrukcja różnych wariantów modelu wyceny dóbr kapitałowych uwzględniających zmienność oszacowania ryzyka systematycznego przy zróżnicowanym poziomie awersji do ryzyka inwestorów.

3. Korelacja stóp zwrotu

Określona zależnością (8) wielkość $\theta_{im}(\nu)$ mierzy korelację pomiędzy stopami zwrotu z waloru i oraz portfela rynkowego. Wzór ten w rzeczywistości definiuje całą rodzinę współczynników korelacji między zmiennymi losowymi. Okazuje się, że dla dowolnych zmiennych losowych X i Y oraz dowolnego $\nu \geq 1$ prawdziwe są następujące własności tychże współczynników:

⁵ E. Schechtman, S. Yitzhaki: A Family of Correlation Coefficients Based on the Extended Gini Index. „Journal of Economic Inequality” 2003, Vol. 1, s. 138; H. Shalit, S. Yitzhaki: Mean-Gini, Portfolio Theory..., op. cit., s. 1463.

1. Dla dowolnego ν : $\theta_{XY}(\nu) \leq 1$. Jeśli $\nu = 2$ lub zmienna losowa X ma rozkład symetryczny, to $\theta_{XY}(\nu) \geq -1$.

2. Jeżeli Y jest rosnącą funkcją X , to $\theta_{XY}(\nu) = 1$.

3. Dla zmiennych losowych niezależnych $\theta_{XY}(\nu) = \theta_{YX}(\nu) = 0$.

4. Jeżeli zmienne losowe X i Y mają dwuwymiarowy rozkład normalny, to $\theta_{XY}(\nu) = \theta_{YX}(\nu) = \rho_{XY}$, gdzie ρ_{XY} oznacza współczynnik korelacji Pearsona⁶.

Warto zwrócić uwagę na to, że rozważany współczynnik korelacji nie jest, w ogólnym przypadku, symetryczny. Co więcej, wielkości $\theta_{XY}(\nu)$ i $\theta_{YX}(\nu)$ mogą mieć nawet różne znaki.

4. Wyniki badań empirycznych

Przeprowadzone analizy empiryczne dotyczyły dziennych stóp zwrotu 17 akcji wchodzących w skład indeksu WIG20 w grudniu 2012 roku i notowanych na GPW w Warszawie w latach 2010-2012⁷ (w nawiasach podano numery spółek wykorzystywane w tabelach wyników): ASSECOPOL (1), BOGDANKA (2), BORYSZEW (3), BRE (4), GTC (5), HANDLOWY (6), KERNEL (7), KGHM (8), LOTOS (9), PEKAO (10), PGE (11), PGNIG (12), PKNORLEN (13), PKOBP (14), SYNTHOS (15), TPSA (16), TVN (17). Jako substytut portfela rynkowego wykorzystano indeks WIG.

Przedmiotem analiz były oszacowania oparte na uogólnionym współczynniku Giniego:

- ryzyka całkowitego akcji,
- ryzyka systematycznego akcji,
- korelacji stóp zwrotu z akcji i portfela rynkowego.

Istotnym elementem badań było porównanie rankingów spółek ze względu na poziom ryzyka całkowitego i systematycznego akcji oszacowanego przy różnych wartościach parametru ν . Jak zauważają Gregory-Allen i Shalit⁸, zarówno inwestorzy indywidualni, jak i zarządzający funduszami inwestycyjnymi często wykorzystują rankingi przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych. Są to jednak rankingi „statyczne” – te same dla wszystkich inwestorów. Jednocześnie nie-

⁶ Ibid., s. 133.

⁷ Trzy spośród akcji wchodzących w skład indeksu WIG20 w grudniu 2012 roku (JSW, PZU, TAURONPE) nie były notowane w całym trzyletnim okresie objętym badaniem. Próba badawcza obejmowała 752 obserwacje.

⁸ R.B. Gregory-Allen, H. Shalit: The Estimation of Systematic Risk under Differentiated Risk Aversion: A Mean-Extended Gini Approach. „Review of Quantitative Finance and Accounting” 1999, No. 12, s. 136.

trudno sobie wyobrazić, że uszeregowanie spółek może różnić się nawet znacznie, jeśli uwzględnimy poziom awersji do ryzyka potencjalnych inwestorów: akcje agresywne dla inwestora z dużą awersją do ryzyka mogą być równocześnie uznane za defensywne przez inwestora z awersją nieznaczną.

4.1. Uogólniony współczynnik Giniego akcji

Analizując ryzyko badanych spółek wyznaczone zostały wartości uogólnionego współczynnika Giniego przy ν równych kolejno: 1,5; 2,5; 3; 4; 6; 8; 10; 15; 20⁹.

W tabeli 1¹⁰ przedstawiono wartości uogólnionego współczynnika Giniego poszczególnych akcji. Wyraźnie zaobserwować można wzrost wartości oszacowań ryzyka całkowitego wraz ze wzrostem ν . Niezależnie jednak od uwzględnianego poziomu awersji do ryzyka, za najbardziej ryzykowne uznać należy akcje BORYSZEW, natomiast za najbezpieczniejsze PGNIG z wyjątkiem $\nu = 1,5$ – w tym przypadku współczynnik Giniego ma wartość najmniejszą dla akcji TPSA. Uzyskane wyniki pozwalają wysnuć przypuszczenie, iż uszeregowania spółek względem wartości $\Gamma(\nu)$ dla różnych ν są bardzo zbliżone. Potwierdzają to rankingi spółek (tabela 2) oraz wyznaczone dla tych rankingów wartości $r\tau$ współczynnika korelacji rang Kendalla¹¹ (tabela 3). Wskazują one na duże podobieństwo uporządkowań uzyskanych dla kolejnych wartości ν . Można przy tym wyraźnie zauważyć, iż podobieństwo to jest tym mniejsze, im większa jest różnica przyjmowanego poziomu awersji do ryzyka. Najbardziej różnią się uporządkowania spółek dla ν równych: 1,5 i 10; 1,5 i 15; 1,5 i 20 ($r\tau = 0,853$). Natomiast w dwóch przypadkach (ν równe: 2,5 i 3 oraz 15 i 20) są one w pełni zgodne ($r\tau = 1$).

⁹ W badaniach przyjęto wartości parametrów zaproponowane w pracy R.B. Gregory-Allen, H. Shalit: Op. cit., s. 136. Natomiast wyniki analogicznych badań przeprowadzonych dla średniej różnicy Giniego ($\nu = 2$) znaleźć można w pracy E. Majewska, R. Jankowski: Współczynnik Giniego jako miara ryzyka a normalność rozkładu stóp zwrotu. W: Modelowanie preferencji a ryzyko'11. Red. T. Trzaskalik. UE, Katowice 2011, s. 57-68.

¹⁰ W tabelach 1, 4, 7 przyjęto zasadę wyróżniania (pogrubiania) wartości najmniejszych i największych w poszczególnych kolumnach.

¹¹ Współczynnik korelacji rang Kendalla jest miarą podobieństwa uporządkowań obiektów: wartość 1 oznacza całkowitą ich zgodność, wartość 0 brak zgodności, a wartość -1 pełną przeciwstawność. J.M. Kowalski: Podstawy statystyki opisowej dla ekonomistów. Wyższa Szkoła Bankowa, Poznań 2006, s. 191-192. W niniejszym opracowaniu do wyznaczenia wartości współczynnika Kendalla wykorzystano pakiet SPSS 20.0.

Tabela 1

Uogólniony współczynnik Giniego akcji

Spółka	$\Gamma(1,5)$	$\Gamma(2,5)$	$\Gamma(3)$	$\Gamma(4)$	$\Gamma(6)$	$\Gamma(8)$	$\Gamma(10)$	$\Gamma(15)$	$\Gamma(20)$
1	0,6097	1,2529	1,4667	1,7972	2,2566	2,5790	2,8268	3,2707	3,5806
2	0,5677	1,1272	1,3082	1,5840	1,9614	2,2241	2,4249	2,7802	3,0215
3	1,1428	2,1813	2,5186	3,0423	3,7846	4,3209	4,7424	5,5164	6,0640
4	0,6758	1,3848	1,6227	1,9923	2,5117	2,8827	3,1719	3,6984	4,0704
5	0,8451	1,7310	2,0261	2,4848	3,1329	3,5998	3,9664	4,6388	5,1155
6	0,6685	1,3769	1,6136	1,9805	2,4941	2,8588	3,1420	3,6572	4,0238
7	0,7998	1,6183	1,8839	2,2879	2,8391	3,2215	3,5132	4,0292	4,3811
8	0,7988	1,6798	1,9774	2,4393	3,0867	3,5502	3,9145	4,5927	5,0919
9	0,7413	1,5436	1,8099	2,2178	2,7755	3,1612	3,4542	3,9710	4,3229
10	0,6614	1,3695	1,6032	1,9595	2,4462	2,7861	3,0481	3,5225	3,8585
11	0,5224	1,0758	1,2618	1,5515	1,9609	2,2553	2,4866	2,9147	3,2263
12	0,5331	1,0755	1,2527	1,5232	1,8936	2,1511	2,3480	2,6990	2,9425
13	0,6910	1,4310	1,6756	2,0484	2,5544	2,9038	3,1712	3,6543	3,9993
14	0,6132	1,2698	1,4879	1,8217	2,2787	2,5971	2,8420	3,2842	3,5963
15	0,7805	1,5901	1,8561	2,2664	2,8457	3,2686	3,6064	4,2444	4,7145
16	0,5209	1,0835	1,2756	1,5789	2,0199	2,3496	2,6182	3,1427	3,5490
17	0,7769	1,5973	1,8703	2,2921	2,8805	3,2990	3,6260	4,2293	4,6682

Tabela 2

Rankingi akcji względem uogólnionego współczynnika Giniego

Spółka	$\Gamma(1,5)$	$\Gamma(2,5)$	$\Gamma(3)$	$\Gamma(4)$	$\Gamma(6)$	$\Gamma(8)$	$\Gamma(10)$	$\Gamma(15)$	$\Gamma(20)$
1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2	4	4	4	4	3	2	2	2	2
3	17	17	17	17	17	17	17	17	17
4	9	9	9	9	9	9	10	10	10
5	16	16	16	16	16	16	16	16	16
6	8	8	8	8	8	8	8	9	9
7	15	14	14	13	12	12	12	12	12
8	14	15	15	15	15	15	15	15	15
9	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	7	7	7	7	7	7	7	7	7
11	2	2	2	2	2	3	3	3	3
12	3	1	1	1	1	1	1	1	1
13	10	10	10	10	10	10	9	8	8
14	6	6	6	6	6	6	6	6	6
15	13	12	12	12	13	13	13	14	14
16	1	3	3	3	4	4	4	4	4
17	12	13	13	14	14	14	14	13	13

Tabela 3

Współczynniki korelacji Kendalla rankingów akcji
względem uogólnionego współczynnika Giniego

$r\tau$	$\Gamma(1,5)$	$\Gamma(2,5)$	$\Gamma(3)$	$\Gamma(4)$	$\Gamma(6)$	$\Gamma(8)$	$\Gamma(10)$	$\Gamma(15)$	$\Gamma(20)$
$\Gamma(1,5)$	1,000	0,926	0,926	0,912	0,882	0,868	0,853	0,853	0,853
$\Gamma(2,5)$		1,000	1,000	0,985	0,956	0,941	0,926	0,897	0,897
$\Gamma(3)$			1,000	0,985	0,956	0,941	0,926	0,897	0,897
$\Gamma(4)$				1,000	0,971	0,956	0,941	0,912	0,912
$\Gamma(6)$					1,000	0,985	0,971	0,941	0,941
$\Gamma(8)$						1,000	0,985	0,956	0,956
$\Gamma(10)$							1,000	0,971	0,971
$\Gamma(15)$								1,000	1,000
$\Gamma(20)$									1,000

4.2. Ryzyko systematyczne akcji

Analizując ryzyko systematyczne akcji badanych spółek nie można, w odróżnieniu od $\Gamma(\nu)$, stwierdzić monotoniczności oszacowań $\beta(\nu)$ względem ν (tabela 4). Niezależnie od wartości tego parametru najmniej wrażliwe na zmiany rynku okazały się akcje TPSA ($\beta(\nu) < 0,55 < 1$ – akcje defensywne), natomiast najbardziej KGHM ($\beta(\nu) > 1,38 > 1$ – akcje ofensywne). W przypadku akcji SYNTHOS (numer 15 w tabeli) mamy do czynienia z sytuacją, w której część inwestorów uznaje je za defensywne ($\beta(\nu) < 1$ dla $\nu = 1,5; 2,5; 3; 4; 6; 8; 10$), a inni (z większą awersją do ryzyka) za ofensywne ($\beta(\nu) > 1$ dla $\nu = 15; 20$). Tym bardziej interesujące wydaje się więc porównanie rankingów akcji względem wartości parametru $\beta(\nu)$ dla poszczególnych ν . Okazuje się, że rankingi te są bardzo zbliżone (tabela 5). Współczynnik korelacji rang $r\tau$ Kendalla przyjmuje wartości nie mniejsze niż 0,912 (tabela 6). Podobnie jak w przypadku uporządkowań akcji względem $\Gamma(\nu)$, w dwóch sytuacjach mamy pełną zgodność rankingów – $r\tau = 1$ dla ν równego 6 i 8 oraz 15 i 20, a największe różnice dla skrajnych wartości ν (1,5 i 15; 1,5 i 20; 2,5 i 15; 2,5 i 20; 3 i 15; 3 i 20). Znaczne podobieństwo rankingów akcji względem $\beta(\nu)$ potwierdzają też wcześniejsze badania przeprowadzone na rynku polskim¹².

¹² E. Majewska: Wykorzystanie współczynnika Giniego do oceny ryzyka systematycznego. W: Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych. Red. B. Borkowski. Warszawa 2010, s. 6.

Tabela 4

Ryzyko systematyczne akcji przy różnych wartościach ν

Spółka	$\beta(1,5)$	$\beta(2,5)$	$\beta(3)$	$\beta(4)$	$\beta(6)$	$\beta(8)$	$\beta(10)$	$\beta(15)$	$\beta(20)$
1	0,7358	0,7452	0,7494	0,7556	0,7634	0,7684	0,7726	0,7829	0,7928
2	0,5607	0,5823	0,5928	0,6085	0,6247	0,6305	0,6321	0,6310	0,6290
3	1,1833	1,1936	1,2002	1,2145	1,2442	1,2707	1,2923	1,3296	1,3527
4	1,1002	1,0974	1,1005	1,1059	1,1113	1,1130	1,1128	1,1081	1,1023
5	1,0282	1,0664	1,0768	1,0877	1,0932	1,0915	1,0868	1,0685	1,0466
6	0,7474	0,7864	0,7981	0,8146	0,8352	0,8486	0,8581	0,8734	0,8844
7	0,5976	0,5866	0,5915	0,6074	0,6414	0,6701	0,6943	0,7429	0,7790
8	1,4489	1,4647	1,4663	1,4664	1,4611	1,4514	1,4399	1,4113	1,3865
9	1,1278	1,1339	1,1362	1,1405	1,1496	1,1585	1,1663	1,1798	1,1863
10	1,2132	1,2006	1,1941	1,1827	1,1684	1,1609	1,1567	1,1525	1,1519
11	0,7452	0,7387	0,7420	0,7503	0,7663	0,7800	0,7920	0,8165	0,8354
12	0,5508	0,5507	0,5522	0,5556	0,5637	0,5715	0,5779	0,5891	0,5958
13	1,2124	1,2137	1,2135	1,2128	1,2121	1,2136	1,2163	1,2247	1,2321
14	1,1711	1,1535	1,1489	1,1425	1,1345	1,1297	1,1271	1,1263	1,1291
15	0,8239	0,8434	0,8557	0,8799	0,9223	0,9559	0,9816	1,0214	1,0392
16	0,5455	0,5337	0,5241	0,5067	0,4821	0,4675	0,4584	0,4464	0,4412
17	0,9102	0,9426	0,9515	0,9644	0,9803	0,9881	0,9908	0,9851	0,9720

Tabela 5

Rankingi akcji względem współczynnika beta

Spółka	$\beta(1,5)$	$\beta(2,5)$	$\beta(3)$	$\beta(4)$	$\beta(6)$	$\beta(8)$	$\beta(10)$	$\beta(15)$	$\beta(20)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	6	6	6	5	5	5	5	5
2	3	3	4	4	3	3	3	3	3
3	14	14	15	16	16	16	16	16	16
4	11	11	11	11	11	11	11	11	11
5	10	10	10	10	10	10	10	10	10
6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
7	4	4	3	3	4	4	4	4	4
8	17	17	17	17	17	17	17	17	17
9	12	12	12	12	13	13	14	14	14
10	16	15	14	14	14	14	13	13	13
11	6	5	5	5	6	6	6	6	6
12	2	2	2	2	2	2	2	2	2
13	15	16	16	15	15	15	15	15	15

cd. tabeli 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	13	13	13	13	12	12	12	12	12
15	8	8	8	8	8	8	8	9	9
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	9	9	9	9	9	9	9	8	8

Tabela 6

Współczynnik korelacji Kendalla rankingów akcji względem
współczynnika beta

$r\tau$	$\beta(1,5)$	$\beta(2,5)$	$\beta(3)$	$\beta(4)$	$\beta(6)$	$\beta(8)$	$\beta(10)$	$\beta(15)$	$\beta(20)$
$\beta(1,5)$	1,000	0,971	0,941	0,926	0,941	0,941	0,926	0,912	0,912
$\Gamma(2,5)$		1,000	0,971	0,956	0,941	0,941	0,926	0,912	0,912
$\beta(3)$			1,000	0,985	0,941	0,941	0,926	0,912	0,912
$\beta(4)$				1,000	0,956	0,956	0,941	0,926	0,926
$\beta(6)$					1,000	1,000	0,985	0,971	0,971
$\beta(8)$						1,000	0,985	0,971	0,971
$\beta(10)$							1,000	0,985	0,985
$\beta(15)$								1,000	1,000
$\beta(20)$									1,000

4.3. Korelacja stóp zwrotu akcji i portfela rynkowego

Ostatnim elementem przeprowadzonych badań była analiza korelacji stóp zwrotu z akcji i indeksu WIG (tabela 7). We wszystkich przypadkach korelacja ta jest dodatnia, przy czym najsilniejszą zależność obserwujemy dla akcji PKOBP ($\theta_{im}(\nu)$ i $\theta_{mi}(\nu)$ przekraczają 0,81 dla wszystkich ν). Najsłabiej z rynkiem skorelowane są natomiast akcje KERNEL, przy czym dla $\nu = 8, 10, 15$ i 20 najmniejsze wartości θ_{im} charakteryzują akcje TPSA.

Tabela 7

Współczynniki korelacji akcji z portfelem rynkowym

V	1,5		2,5		3		4		6		8		10		15		20	
Spółka	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}	θ_{im}	θ_{mi}
1	0,5164	0,5302	0,5327	0,5364	0,5389	0,5403	0,5478	0,5474	0,5593	0,5584	0,5677	0,5664	0,5751	0,5724	0,5917	0,5831	0,6061	0,5910
2	0,4226	0,4920	0,4627	0,5131	0,4779	0,5156	0,5005	0,5158	0,5265	0,5110	0,5402	0,5055	0,5485	0,5002	0,5610	0,4889	0,5698	0,4794
3	0,4431	0,4670	0,4901	0,4935	0,5026	0,5042	0,5201	0,5228	0,5435	0,5510	0,5604	0,5712	0,5734	0,5857	0,5958	0,6064	0,6106	0,6140
4	0,6966	0,6888	0,7098	0,6967	0,7153	0,7018	0,7232	0,7114	0,7315	0,7262	0,7357	0,7356	0,7382	0,7411	0,7406	0,7460	0,7413	0,7462
5	0,5206	0,5351	0,5518	0,5426	0,5606	0,5429	0,5703	0,5430	0,5769	0,5443	0,5778	0,5454	0,5765	0,5452	0,5694	0,5399	0,5600	0,5305
6	0,4784	0,4728	0,5116	0,4908	0,5217	0,5005	0,5359	0,5173	0,5537	0,5395	0,5656	0,5518	0,5746	0,5589	0,5903	0,5676	0,6017	0,5738
7	0,3197	0,3660	0,3247	0,3743	0,3312	0,3773	0,3459	0,3824	0,3735	0,3893	0,3963	0,3941	0,4159	0,3981	0,4557	0,4072	0,4867	0,4157
8	0,7761	0,7753	0,7810	0,7836	0,7821	0,7843	0,7833	0,7847	0,7826	0,7856	0,7790	0,7860	0,7740	0,7855	0,7596	0,7812	0,7453	0,7753
9	0,6510	0,6680	0,6580	0,6915	0,6621	0,6980	0,6700	0,7070	0,6848	0,7182	0,6983	0,7251	0,7104	0,7297	0,7344	0,7366	0,7511	0,7404
10	0,7848	0,7839	0,7852	0,7825	0,7855	0,7827	0,7864	0,7846	0,7896	0,7913	0,7940	0,7989	0,7985	0,8062	0,8088	0,8215	0,8172	0,8329
11	0,6103	0,6037	0,6150	0,6071	0,6202	0,6123	0,6301	0,6226	0,6461	0,6390	0,6590	0,6515	0,6702	0,6618	0,6924	0,6832	0,7088	0,7002
12	0,4421	0,4668	0,4587	0,4783	0,4649	0,4821	0,4752	0,4867	0,4922	0,4908	0,5062	0,4935	0,5179	0,4965	0,5395	0,5038	0,5542	0,5092
13	0,7507	0,7617	0,7597	0,7667	0,7638	0,7691	0,7714	0,7739	0,7845	0,7811	0,7964	0,7857	0,8071	0,7888	0,8284	0,7941	0,8433	0,7984
14	0,8172	0,8176	0,8137	0,8161	0,8144	0,8177	0,8172	0,8221	0,8232	0,8310	0,8289	0,8383	0,8345	0,8444	0,8477	0,8574	0,8594	0,8685
15	0,4517	0,4735	0,4751	0,5019	0,4862	0,5088	0,5058	0,5180	0,5359	0,5309	0,5572	0,5422	0,5727	0,5529	0,5949	0,5755	0,6034	0,5920
16	0,4481	0,4090	0,4412	0,4267	0,4334	0,4319	0,4181	0,4385	0,3946	0,4442	0,3791	0,4458	0,3684	0,4459	0,3511	0,4428	0,3403	0,4376
17	0,5013	0,5449	0,5286	0,5586	0,5366	0,5617	0,5482	0,5641	0,5627	0,5617	0,5707	0,5553	0,5750	0,5472	0,5758	0,5231	0,5700	0,4967

W przypadku wszystkich analizowanych spółek widoczny jest brak symetrii współczynników korelacji opartych na uogólnionym współczynniku Giniego. Różnice pomiędzy wartościami θ_{im} oraz θ_{mi} wahają się (co do modułu) od 0,0004 (PKOBP przy $\nu = 1,5$ oraz ASSECOPOL dla $\nu = 10$) do 0,0695 (BOGDANKA przy $\nu = 1,5$).

Podsumowanie

Uogólniony współczynnik Giniego zastosowany do pomiaru ryzyka inwestycyjnego daje możliwość różnicowania analiz poprzez uwzględnienie poziomu awersji do ryzyka inwestora. Przedstawione w pracy wyniki badań wskazują jednak na duże podobieństwo rankingów akcji względem zarówno $\Gamma(\nu)$, jak i $\beta(\nu)$ przy zmieniających się wartościach ν . Przy różnych poziomach awersji do ryzyka uporządkowanie spółek nie zmieniało się więc w sposób radykalny. Oznacza to, że preferencje inwestora wobec ryzyka nie miały znaczącego wpływu na uporządkowanie spółek ani ze względu na poziom ich ryzyka całkowitego, ani ryzyka systematycznego. Podobne wnioski dotyczą stopnia korelacji akcji z rynkiem szacowanego w oparciu o wielkości $\theta_{im}(\nu)$ i $\theta_{mi}(\nu)$. Co więcej, wyniki te częściowo potwierdzają badania wcześniejsze. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że jak dotąd analizy prowadzone na rynku polskim dotyczyły spółek wchodzących w skład indeksu WIG20, czyli największych spółek na rynku. Otwarte pozostaje więc pytanie, czy uzyskane wyniki znalazłyby potwierdzenie w badaniach o szerszym zakresie, np. dłuższych i krótszych okresach badawczych lub też uwzględniających mniejsze spółki. Te zagadnienia mogą być przedmiotem dalszych badań.

Literatura

- Gregory-Allen R.B., Shalit H.: The Estimation of Systematic Risk under Differentiated Risk Aversion: A Mean-Extended Gini Approach. „Review of Quantitative Finance and Accounting” 1999, No. 12.
- Haugen R.A.: Teoria nowoczesnego inwestowania. WIG-Press, Warszawa 1996.
- Kowalski J.M.: Podstawy statystyki opisowej dla ekonomistów. Wyższa Szkoła Bankowa, Poznań 2006.
- Majewska E.: Analiza stabilności ryzyka funduszy inwestycyjnych mierzonego średnią różnicą Giniego. „Prace i Materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego” 2009, Vol. 4, No. 1.

- Majewska E.: Ocena ryzyka funduszy inwestycyjnych z wykorzystaniem współczynnika Giniego. W: Modelowanie preferencji a ryzyko'09. Red. T. Trzaskalik. AE, Katowice 2010.
- Majewska E., Jankowski R.: Współczynnik Giniego jako miara ryzyka a normalność rozkładu stóp zwrotu. W: Modelowanie preferencji a ryzyko'11. Red. T. Trzaskalik. Uniwersytet Ekonomiczny, Katowice 2011.
- Majewska E.: Wykorzystanie współczynnika Giniego do oceny ryzyka systematycznego. W: Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych. Red. B. Borkowski. Warszawa 2010.
- Schechtman E., Yitzhaki S.: A Family of Correlation Coefficients Based on the Extended Gini Index. „Journal of Economic Inequality” 2003, Vol. 1.
- Shalit H., Yitzhaki S.: Mean-Gini, Portfolio Theory and the Pricing of Risky Assets. „Journal of Finance” 1984, Vol. 39, No. 5.
- Shalit H., Yitzhaki S.: Evaluating the Mean-Gini Approach to Portfolio Selection. „International Journal of Finance” 1989, Vol. 1, No. 2.
- Yaari M.: The Dual Theory of Choice under Risk. „Econometrica” 1987, Vol. 55, No. 1.
- Yitzhaki S.: The Mean-Gini Efficient Portfolio Frontier. „The Journal of Financial Research” 2005, Vol. XXVIII, No. 1.
- Yitzhaki S.: On an Extension of the Gini Inequality Index. „International Economic Review” 1983, Vol. 24, No. 3.
- Yitzhaki S.: Stochastic Dominance, Mean-variance, and Gini's Mean Difference. „American Economic Review” 1982, Vol. 72, No. 1.

RISK MEASUREMENT OF THE WIG20 COMPANIES USING THE EXTENDED GINI COEFFICIENT

Summary

This paper presents the basic properties of the extended Gini coefficient as a risk measure. We define the measure of systematic risk (beta coefficient) and the correlation between securities based on the extended Gini coefficient. The presented issues we illustrate with empirical research conducted on the basis of selected shares quoted on the Warsaw Stock Exchange.

Adrianna Mastalerz-Kodzis

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

KONSTRUKCJA OPTYMALNYCH PORTFELI Z ZASTOSOWANIEM METOD ANALIZY FUNDAMENTALNEJ – UJĘCIE DYNAMICZNE

Wprowadzenie

W działalności instytucji finansowych, takich jak towarzystwa emerytalne, fundusze inwestycyjne, konieczna jest alokacja środków na długi okres. Istnieje zatem konieczność wyboru metod i sposobu inwestowania dającego maksymalnie bezpieczne ulokowanie środków w dynamicznie i stochastycznie zmieniającym się otoczeniu.

W artykule przedstawiono podstawy teoretyczne oraz praktyczne aplikacje wybranych metod ilościowych znajdujących zastosowanie podczas konstrukcji portfela fundamentalnego akcji, a także w zarządzaniu ryzykiem na rynku kapitałowym. W rozważaniach uwzględniono elementy dynamicznej analizy fundamentalnej oraz klasycznej teorii portfelowej zakładając, że zmiany zachodzące na rynku kapitałowym mają charakter dynamiczny i stochastyczny. Podejście fundamentalne do konstrukcji portfela papierów wartościowych zajęło już trwałe i ważne miejsce we współczesnej teorii portfelowej. Jednakże zawsze aktualne jest pytanie o stabilność w czasie uzyskanych rozwiązań optymalnych.

Celem artykułu jest konstrukcja portfela akcji na podstawie metodologii wielowymiarowej analizy porównawczej z uwzględnieniem dynamiki zmiennych oraz odpowiedź na pytanie, czy istotne zmiany jakie miały miejsce w ostatnich latach na giełdzie wpływają na strukturę portfela i jego efektywność. Artykuł składa się z dwóch części. Pierwsza ma charakter teoretyczny, zawiera podstawowe pojęcia i metody wielowymiarowej analizy porównawczej. Druga ma charakter aplikacyjny, została opracowana na podstawie danych zaczerpniętych z GPW w Warszawie S.A.

1. Wybrane elementy wielowymiarowej analizy porównawczej

W metodologii WAP (wielowymiarowej analizy porównawczej) bierze się pod uwagę dane historyczne dotyczące sytuacji ekonomiczno-finansowej spółek za okres 3-5 lat i te wielkości odpowiednio przekształca stosując średnią. Dzięki tej metodzie można porównać różne obiekty (np. spółki giełdowe), które są opisywane przez wiele cech, np. wskaźników świadczących o sile fundamentalnej spółek. Podczas przekształceń jednak pewna część informacji zostaje utraczona. Zarówno ceny walorów giełdowych, jak i dane finansowe dotyczące tych walorów zmieniają się pod wpływem czasu, uśrednienie tych wielkości powoduje stratę informacji.

W WAP wykorzystuje się wiele wskaźników do oceny poszczególnych obiektów. Na podstawie danych historycznych można wielkości wskaźników prognozować, zaś na podstawie prognoz konstruować optymalne portfele. Czy jednak efektywność tak skonstruowanych portfeli jest wyższa aniżeli efektywność portfeli bez uwzględnienia prognoz? Ponadto należy pamiętać, że wskaźniki określające siłę fundamentalną spółek są często dodatnio skorelowane. Można zadać pytanie, czy prowadzenie analiz wyłącznie na bazie spółek, w których dane (stymulanty) wykazują trend rosnący lub stały daje lepsze efekty aniżeli rozważanie pierwotnego zbioru danych.

WAP opiera się na konstrukcji taksonomicznego miernika wzorcowego¹. Dane o kondycji ekonomiczno-finansowej spółek przedstawia się w postaci macierzy. Należy wybrać spośród wielu dostępnych wskaźników kilka najistotniejszych. Odpowiedni dobór wskaźników jest bardzo istotny, zależy od wielu czynników, np. od dostępności danych. Prawidłowo dobrany zestaw danych prowadzi do trafnej oceny kondycji ekonomiczno-finansowej spółki².

Dane pierwotne zapisane w postaci stymulant przedstawia się w postaci macierzowej. Następnie przeprowadza się normalizację. W pracy dla $\bar{x}_j$ średniej arytmetycznej cechy j oraz dla s_j – odchylenia standardowego dla cechy j wykorzystano standaryzację według wzoru

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} \quad (1)$$

¹ M. Łuniewska, W. Tarczyński: Metody wielowymiarowej analizy porównawczej na rynku kapitałowym. PWN, Warszawa 2006.

² J. Jaworski: Teoria i praktyka zarządzania finansami przedsiębiorstw. CeDeWu, Warszawa 2010.

W dalszej kolejności konstruuje się miernik oparty na wzorcu. W macierzy zmiennych znormalizowanych dla każdej zmiennej wybiera się wartość największą – zestaw tak dobranych danych stanowi wzorzec z_{oj} . Obliczana jest odległość obiektu od wzorca. W pracy posłużono się odległością euklidesową

$$d_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (z_{ij} - z_{oj})^2}{m}} \quad (2)$$

Im mniejsza odległość danego obiektu od wzorca, tym mniejsza wartość d_i . Uzyskana zmienna jest nieunormowana. Przekształcamy ją wykorzystując na przykład wzór

$$z_i = 1 - \frac{d_i}{d_0} \quad (3)$$

gdzie: z_i to taksonomiczny miernik rozwoju i -tego obiektu, d_i to odległość i -tego obiektu od wzorca, d_0 – norma, która zapewnia, że zmienna z_i będzie przyjmowała wartości z przedziału $[0,1]$, (np. $d_0 = \bar{d} + 2s_d$, $\bar{d}$ – średnia arytmetyczna d_i , s_d – odchylenie standardowe d_i). Im większa wartość zmiennej z_i , tym obiekt posiada wyższą pozycję w rankingu.

W klasycznym ujęciu taksonomicznego miernika atrakcyjności inwestycji uśrednia się wartości wskaźników ekonomiczno-finansowych. Jednak uwzględniając dynamiczny charakter zmian zachodzących na rynku kapitałowym należałoby prognozować wskaźniki biorąc pod uwagę horyzont inwestycyjny³.

2. Badanie efektu pamięci w szeregach czasowych

Badania dotyczące istnienia efektu pamięci w szeregach czasowych stóp zwrotu walorów giełdowych pokazują, że znaczna część szeregów giełdowych charakteryzuje się większą od 0,5 wartością wykładnika Hursta⁴. Oznacza to, że szeregi giełdowe nie mają przyrostów niezależnych, podlegają obciążonemu błędzeniu przypadkowemu z szumem. Są to szeregi persystentne, wzmacniające

³ W. Tarczyński: Dynamiczne ujęcie taksonomicznej miary atrakcyjności inwestowania na przykładzie wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Metody Ilościowe w Ekonomii. Cz. I. Zeszyty Naukowe. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2005, nr 394.

⁴ A. Mastalerz-Kodzis: Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2003.

trend. Trend jest widoczny, a kolejne elementy szeregu nie są niezależne. Szereg zachowuje pamięć zarówno krótką, jak i sięgającą daleko wstecz, jednakże odległe elementy szeregu mają nieznaczny wpływ na elementy bieżące. Im dalszy horyzont czasowy, tym pamięć słabsza.

Warto także pamiętać, że wykładnik Hursta nie jest stały w czasie⁵. Zmiany wykładnika świadczą o niestacjonarności szeregu. Czy wobec niestacjonarności szeregu cen walorów giełdowych optymalne rozwiązania uzyskane na podstawie metod fundamentalnych oraz teorii portfelowej będą stabilne w czasie?

3. Analiza empiryczna

W metodologii WAP bierze się pod uwagę dane historyczne dotyczące sytuacji ekonomiczno-finansowej spółek za okres 3-5 lat. W analizach brano pod uwagę dane za lata 2009-2011. Zadanie polega na konstrukcji portfela o horyzoncie inwestycyjnym równym pół roku oraz rok. Badania obejmują dane zaczerpnięte z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. Wykorzystano wielkości charakteryzujące kondycję ekonomiczno-finansową spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 w lutym 2013 roku. Skompletowano dane dla 15 spółek za okres 01.01.2009-31.12.2011. W celu oceny efektywności portfeli do analiz posłużyły także ceny zamknięcia wybranych akcji z 2012 i 2013 roku. Dokonano wyboru wielkości charakteryzujących siłę fundamentalną spółek. W tabeli 1 przedstawiono wskaźniki ekonomiczno-finansowe za lata 2009-2011 (dane zaczerpnięto ze stron internetowych www.gpw.pl, www.bankier.pl, www.money.pl). W tabeli przedstawiono dane roczne, natomiast podczas analiz brano także pod uwagę dane kwartalne za lata 2009-2011. Wskaźniki zmieniają się pod wpływem czasu. Tempo i kierunek tych zmian zostanie uwzględniony podczas konstrukcji portfela papierów wartościowych.

Wybrane charakterystyki spółek to wskaźniki:

- zyskowności sprzedaży netto (zysk netto/przychody netto ze sprzedaży),
- rentowności aktywów ROA (zysk netto/aktywa ogółem),
- rentowności kapitału własnego ROE (zysk netto/kapitał własny),
- zysku netto na jedną akcję (zysk netto/liczba wyemitowanych akcji),
- P/BV (cena rynkowa akcji/wartość księgowa firmy na 1 akcję).

Wszystkie powyższe wskaźniki są stymulantami. Dane roczne zamieszczono w tabeli 1.

⁵ A. Mastalerz-Kodzis: Op. cit.

Tabela 1

Wskaźniki ekonomiczno-finansowe za lata 2009-2011
dla wybranych spółek

WSKAŹNIK		2009	2010	2011		2009	2010	2011		2009	2010	2011
ROE	ASSECOPOL	10,05	9,29	8,17	PEKAO	13,19	12,52	13,63	KERNEL	38,09	25,26	23,29
ROA		6,5	4,89	4,19		1,85	1,88	1,98		19,37	13,51	14,39
ZYSK NA 1 AKCJĘ		4,81	5,34	5,12		9,19	9,62	11,05		1,97	2,08	3,07
RENTOWNOŚĆ NETTO		12,24	12,8	8,01		25,48	27,02	28,05		12,94	14,9	11,91
P/BV		1,3	0,94	0,7		2,41	2,4	1,96		6,03	7,61	6,15
ROE	BOGDANKA	11,07	11,73	10,36	PGE	10,81	8,09	12,11	KGHM	22,18	32,21	47,89
ROA		7,75	8,13	7,18		6,19	5,55	8,4		15,63	22,24	36,21
ZYSK NA 1 AKCJĘ		5,63	6,76	6,5		1,95	1,6	2,64		11,64	23,62	55,32
RENTOWNOŚĆ NETTO		17,12	18,68	16,98		15,59	14,61	17,56		19,21	28,18	50,04
P/BV		1,39	1,91	2,08		1,36	1,16	0,76		1,98	2,16	1,49
ROE	BORYSZEW	9,51	1	20,38	PGNIG	5,77	10,44	6,64	LOTOS	13,23	9,06	8,34
ROA		1,98	0,23	5,2		3,98	7,29	4,29		5,92	3,83	3,18
ZYSK NA 1 AKCJĘ		0,63	0,01	0,06		0,21	0,42	0,28		6,94	5,23	5
RENTOWNOŚĆ NETTO		1,78	0,16	3,26		6,39	11,53	7,07		6,29	3,45	2,22
P/BV		1,03	4,44	1,53		1,05	0,92	1,37		0,61	0,61	0,68
ROE	BRE	3,13	9,29	14,1	PKN ORLEN	6,87	10,96	9,63	SYNTHOS	10,02	22,5	32,85
ROA		0,16	0,71	1,15		2,67	4,64	4,02		5,57	13,54	21,05
ZYSK NA 1 AKCJĘ		4,34	15,24	26,96		3,06	5,54	5,53		0,12	0,36	0,73
RENTOWNOŚĆ NETTO		2,89	13,95	22,04		1,93	2,84	2,21		6,31	12,33	17,65
P/BV		1,8	1,85	1,3		0,72	0,95	0,63		0,93	1,94	2,57
ROE	HANDLOWY	8,14	11,63	11,43	PKO BP	11,29	15,06	16,68	TP SA	0,73	13,38	6,6
ROA		1,34	2,01	1,74		1,47	1,9	2		0,37	6,79	3,54
ZYSK NA 1 AKCJĘ		3,86	5,78	5,64		1,84	2,57	3,05		0,08	1,44	0,64
RENTOWNOŚĆ NETTO		18,28	27,75	27,48		18,64	22,5	23,98		0,68	12,85	6,04
P/BV		1,53	1,91	1,86		2,32	2,59	1,9		1,53	1,63	0,75

Na podstawie danych historycznych spółek giełdowych obliczono stopę zwrotu ceny zamknięcia i jej odchylenie standardowe za lata 2009-2011. Obliczono także za pomocą programu *Gretl* wartości wykładnika Hursta, które potwierdziły istnienie pamięci w szeregu. Dla analizowanych spółek znajdowały

się one w przedziale (0,52; 0,68). Na podstawie powyższych wskaźników skonstruowano wartości miary taksonomicznej z_i . Biorąc pod uwagę dynamikę zmian wskaźników skonstruowano prognozy ich wartości na kolejny okres (2012 rok) i uwzględniając te wielkości obliczono prognozy wartości z_i . Wyniki przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Wybrane charakterystyki spółek giełdowych: miernik taksonomiczny, historyczna dzienna stopa zwrotu, odchylenie standardowe historycznej stopy zwrotu za lata 2009-2011

	NAZWA SPÓŁKI	z_i	R_i	s_i	z_i indeks	z_i reglin
1	ASSECOPOL	0,1949	0,0002	0,0198	0,1516	0,1620
2	BOGDANKA	0,2976	0,0010	0,0184	0,2610	0,2658
3	BORYSZEW	0,1635	0,0004	0,0536	0,1928	0,1916
4	BRE	0,2426	0,0007	0,0300	0,2833	0,2610
5	HANDLOWY	0,2503	0,0007	0,0225	0,2392	0,2490
6	KERNEL	0,5231	0,0027	0,0293	0,4604	0,4590
7	KGHM	0,5963	0,0022	0,0298	0,5773	0,5972
8	LOTOS	0,1466	0,0012	0,0261	0,1149	0,1228
9	PEKAO	0,3222	0,0001	0,0239	0,2803	0,2970
10	PGE	0,2184	-0,0002	0,0169	0,1941	0,2053
11	PGNIG	0,1523	0,0003	0,0179	0,1457	0,1498
12	PKN ORLEN	0,1298	0,0006	0,0252	0,1177	0,1266
13	PKO BP	0,2727	0,0001	0,0239	0,2569	0,2631
14	SYNTHOS	0,3218	0,0035	0,0286	0,3911	0,3619
15	TP SA	0,1393	0,0000	0,0195	0,1601	0,2053

Obliczono współczynnik korelacji rang Spearmana pomiędzy wielkościami miar taksonomicznych. Wyniki są następujące: $r(z_i, z_i \text{ indeks}) = 0,9214$, $r(z_i, z_i \text{ reglin}) = 0,975$, $r(z_i \text{ indeks}, z_i \text{ reglin}) = 0,9464$. Istnieje duża zależność pomiędzy miarami taksonomicznymi uwzględniającymi prognozy wskaźników.

W poniższych rozważaniach posłużono się modelem optymalizacyjnym (4) uwzględniając także w dalszych analizach maksymalne udziały spółek w portfelu w celu jego dywersyfikacji.

Model podstawowy ma postać

$$f = \sum_{i=1}^n z_i x_i \rightarrow \max \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n R_i x_i \geq \bar{R}$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i \leq \bar{s}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

gdzie:

x_i – udział i -tej akcji w portfelu,

$\bar{R}$ – akceptowalna stopa zwrotu dla portfela,

$\bar{s}$ – średnie odchylenie standardowe,

z_i – taksonomiczny miernik atrakcyjności inwestycji w i -tą spółkę.

Skonstruowano modele optymalizacyjne uwzględniające poszczególne wielkości parametrów, modele, które po rozwiązaniu dają portfele fundamentalne. Dodatkowo w celu dywersyfikacji portfeli uwzględniono warunki $x_i \leq 0,5$, $x_i \leq 0,2$, $x_i \leq 0,1$. Tabela 3 zawiera udziały spółek w portfelach fundamentalnych oraz ocenę efektywności portfeli.

Tabela 3

Udziały akcji w portfelach fundamentalnych, efektywność portfeli dla miary z_i

NAZWA SPÓŁKI	Udziały spółek	Model	$x_i \leq 0,5$	$x_i \leq 0,2$	$x_i \leq 0,1$
1	2	3	4	5	6
ASSECOPOL	X1	0	0	0	0,1
BOGDANKA	X2	0,36	0,36	0,2	0,1
BORYSZEW	X3	0	0	0	0
BRE	X4	0	0	0	0,1
HANDLOWY	X5	0	0	0	0,1
KERNEL	X6	0	0,14	0,2	0,1
KGHM	X7	0,64	0,5	0,2	0,1
LOTOS	X8	0	0	0	0
PEKAO	X9	0	0	0,2	0,1
PGE	X10	0	0	0,03	0,1
PGNIG	X11	0	0	0	0
PKN ORLEN	X12	0	0	0	0
PKO BP	X13	0	0	0	0,1

cd. tabeli 3

1	2	3	4	5	6
SYNTHOS	X14	0	0	0,17	0,1
TP SA	X15	0	0	0	0
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-02.07.2012		21,37	16,39	12,88	9,80
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-2.01.2013		51,94	42,78	25,84	21,20

Po uwzględnieniu prognoz na 2012 rok przy obliczaniu wartości z_i za pomocą indeksów oraz regresji liniowej otrzymano portfele o zbliżonej efektywności do portfeli wyjściowych (tabela 4 i 5). Współczynniki dopasowania modeli empirycznego i teoretycznego dla wskaźników były z przedziału $R^2 \in (0,82; 0,94)$.

Tabela 4

Udziały akcji w portfelach fundamentalnych, efektywność portfeli
dla miary z_i indeks

NAZWA SPÓŁKI	Udziały spółek	Model	$x_i \leq 0,5$	$x_i \leq 0,2$	$x_i \leq 0,1$
ASSECOPOL	X1	0	0	0	0
BOGDANKA	X2	0,36	0,36	0,2	0,1
BORYSZEW	X3	0	0	0	0,04
BRE	X4	0	0	0	0,1
HANDLOWY	X5	0	0	0	0,1
KERNEL	X6	0	0,14	0,2	0,1
KGHM	X7	0,64	0,5	0,2	0,1
LOTOS	X8	0	0	0	0
PEKAO	X9	0	0	0,16	0,1
PGE	X10	0	0	0,04	0,1
PGNIG	X11	0	0	0	0
PKN ORLEN	X12	0	0	0	0
PKO BP	X13	0	0	0	0,1
SYNTHOS	X14	0	0	0,2	0,1
TP SA	X15	0	0	0	0,06
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-02.07.2012		21,37	16,39	13,68	9,03
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-2.01.2013		51,94	42,78	25,51	19,70

Tabela 5

Udziały akcji w portfelach fundamentalnych, efektywność portfeli
dla miary Z_i reglin

NAZWA SPÓŁKI	Udziały spółek	Model	$x_i \leq 0,5$	$x_i \leq 0,2$	$x_i \leq 0,1$
ASSECOPOL	X1	0	0	0	0
BOGDANKA	X2	0,36	0,36	0,2	0,1
BORYSZEW	X3	0	0	0	0
BRE	X4	0	0	0	0,1
HANDLOWY	X5	0	0	0	0,1
KERNEL	X6	0	0,14	0,2	0,1
KGHM	X7	0,64	0,5	0,2	0,1
LOTOS	X8	0	0	0	0
PEKAO	X9	0	0	0,16	0,1
PGE	X10	0	0	0,04	0,1
PGNIG	X11	0	0	0	0
PKN ORLEN	X12	0	0	0	0
PKO BP	X13	0	0	0	0,1
SYNTHOS	X14	0	0	0,2	0,1
TP SA	X15	0	0	0	0,1
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-02.07.2012		21,37	16,39	13,68	8,97
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-2.01.2013		51,94	42,78	25,51	18,74

Można zatem uznać, że konstruowane portfele są stabilne w czasie, pomimo znacznych zmian zarówno ceny walorów wchodzących w skład portfeli, jak i zmian wskaźników ekonomiczno-finansowych charakteryzujących te walory.

W przypadku uwzględnienia trendu np. wskaźnika „zysk na 1 akcję” i wyboru do portfela tylko akcji o rosnącym trendzie, wyniki przedstawiono w tabeli 6. Wybór spółek o rosnącej wartości zmiennej „zysk na 1 akcję” obniżył efektywność portfela. Jest to związane z ograniczeniem zbioru rozwiązań dopuszczalnych i w pewnym sensie nieuwzględnieniem trendów pozostałych wskaźników.

Tabela 6

Udziały akcji w portfelach fundamentalnych, efektywność portfeli
dla miar z_i

NAZWA SPÓŁKI	Udziały spółek	Model dla z_i	Model dla z_i indeks	Model dla z_i reglin
KGHM	X7	0,5431521	0,5431520	0,5431598
PEKAO	X9	0,4327357	0,4327357	0,4327317
SYNTHOS	X14	0,0241132	0,0241132	0,0241085
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-02.07.2012		14,633217	14,633218	14,633112
Stopa zysku portfela (%) 2.01.2012-2.01.2013		42,510841	42,510838	42,511056

Podsumowanie

Jednym z elementów procesu zarządzania kapitałem powinna być ciągła, rzetelna analiza ekonomiczno-finansowa⁶. Zarządzanie kapitałem zawsze będzie obarczone ryzykiem. Istnieje konieczność kwantyfikacji tego ryzyka i umiejętnego nim zarządzania. Konstrukcja fundamentalnego portfela z uwzględnieniem dynamiki ekonomicznej z pewnością pozwala w dużej mierze na zredukowanie tego ryzyka oraz na podjęcie decyzji inwestycyjnej korzystnej dla inwestora. Świadczy o tym m.in. efektywność portfeli fundamentalnych.

Literatura

- Domański J.: Zarządzanie ryzykiem działalności organizacji. Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2010.
- Jaworski J.: Teoria i praktyka zarządzania finansami przedsiębiorstw. CeDeWu, Warszawa 2010.
- Łuniewska M., Tarczyński W.: Metody wielowymiarowej analizy porównawczej na rynku kapitałowym. PWN, Warszawa 2006.
- Mastalerz-Kodzis A.: Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multi-fraktali. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2003.
- Peters E.E.: Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment and Economy. John Wiley & Sons, New York 1994.
- Statystyczne metody analizy danych. Red. W. Ostasiewicz. AE, Wrocław 1999.

⁶ J. Domański: Zarządzanie ryzykiem działalności organizacji. Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2010.

Tarczyński W.: Dynamiczne ujęcie taksonomicznej miary atrakcyjności inwestowania na przykładzie wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. *Metody Ilościowe w Ekonomii. Cz. I. Zeszyty Naukowe. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2005, nr 394.*

APPLICATION OF FUNDAMENTAL ANALYSIS FOR CONSTRUCTION AN OPTIMAL PORTFOLIO – DYNAMIC APPROACH

Summary

The main purpose of this article is to construct an optimal, fundamental portfolio using multivariate compare analysis methods with dynamical parameters. The article consist of two parts. The first part is methodological, and the second is empirical one.

Joanna Olbryś

Politechnika Białostocka

POMIAR SZYBKOŚCI DOSTOSOWANIA CENY PAPIERU WARTOŚCIOWEGO DO ZMIAN W ZBIORZE INFORMACJI RYNKOWYCH NA PRZYKŁADZIE SPÓŁEK Z GPW W WARSZAWIE S.A.

Wprowadzenie

Wszystkie rynki kapitałowe, a w szczególności rynki rozwijające się (emerging markets), w tym również rynek polski, zagrożone są występowaniem niepożądanych zjawisk empirycznych, które mogą zakłócać przebieg procesów transakcyjnych oraz fałszować wyniki analiz statystycznych czy ekonometrycznych, a w konsekwencji prowadzić nawet do niewłaściwych decyzji inwestycyjnych. W światowej literaturze przedmiotu jako najważniejsze wymienia się efekty niesynchronizacji transakcji I oraz II rodzaju (nonsynchronous trading effects I and II) czy też problemy związane z kosztami transakcyjnymi, w tym z rozpiętością cen sprzedaż/kupno (bid/ask spread). Według literatury, konsekwencją tych zjawisk, interpretowanych przez wielu badaczy jako przyczyny występowania zakłóceń (frictions) lub inaczej „tarcia” (friction) w procesach transakcyjnych, mogą być różne problemy z zakresu finansów empirycznych¹.

Celem pracy jest analiza teoretyczno-empiryczna problemu opóźnień w dostosowaniu ceny papieru wartościowego do zmian w zbiorze informacji rynkowych, w kontekście polskiego rynku kapitałowego oraz pomiar szybkości dostosowania cen akcji na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A., w grupie 20 spółek, notowanych w okresie styczeń 2007-grudzień 2012.

¹ J. Olbryś: Tarcie w procesach transakcyjnych i jego konsekwencje. W: Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a rynek polski. Prace Naukowe. Uniwersytet Ekonomiczny, Wrocław 2012, Vol. 254.

1. Konsekwencje empiryczne zakłóceń w procesach transakcyjnych

Analizując konsekwencje występowania zakłóceń w procesach transakcyjnych, Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz i Whitcomb (1980) zaproponowali pierwszy w literaturze przegląd i podsumowanie wyników badań w tym temacie. Autorzy nawiązali do zasad dynamiki Newtona, krytykując powszechnie przyjęte w badaniach teoretycznych i empirycznych założenie, że proces transakcyjny odbywa się w warunkach idealnych, bez zakłóceń. Omówili najważniejsze prawidłowości empiryczne (określane często również jako anomalie – phenomena), dotyczące własności szeregów stóp zwrotu spółek oraz indeksów giełdowych i portfeli inwestycyjnych, jak również modeli wyceny estymowanych z wykorzystaniem tych szeregów czasowych². Wybrane prawidłowości to: 1) efekty autokorelacji, korelacji przekrojowych oraz przekrojowych międzyokresowych w szeregach stóp zwrotu spółek giełdowych, 2) efekt autokorelacji w szeregach stóp zwrotu portfeli inwestycyjnych, 3) problem opóźnień w dostosowaniu ceny papieru wartościowego do napływającej na rynek informacji, 4) problem obciążenia estymatora parametru ryzyka systematycznego, czyli tzw. efekt przedziałowy tego parametru, oraz 5) efekt przedziałowy współczynnika determinacji modelu wyceny aktywów kapitałowych.

2. Problem opóźnień w dostosowaniu ceny papieru wartościowego do napływającej na rynek informacji

Prawdopodobnie artykuł Fama, Fishera, Jensena i Rolla (1969) był jedną z pierwszych prac, w których pojawiło się pojęcie szybkości dostosowania cen akcji do napływającej na rynek informacji (speed of adjustment of prices). Celem autorów było uzupełnienie luki w badaniach empirycznych, dotyczących oddziaływania różnego rodzaju informacji na ceny papierów wartościowych, w kontekście testowania hipotezy o efektywności informacyjnej rynku³. W fundamentalnej pracy z 1970 roku Fama użył pojęcia szybkości dostosowania ceny papieru wartościowego do napływającej na rynek informacji (speed of price

² K.J. Cohen, G.A. Hawawini, S.F. Maier, R.A. Schwartz, D.K. Whitcomb: Implications of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behaviour. „Journal of Finance” 1980, No. 35.

³ E.F. Fama, L. Fisher, M.C. Jensen, R. Roll: The Adjustment of Stock Prices to New Information. „International Economic Review” 1969, Vol. 10, No. 1.

adjustment) w kontekście testowania pól silnej formy hipotezy o efektywności informacyjnej rynku⁴. W pracach z wczesnych lat 80. pojawiają się również podobne określenia, które jednak nie przyjęły się tak powszechnie, jak stwierdzenie Fama. Na przykład Hawawini i Vora (1980) zaproponowali hipotezę szybkości dostosowania ceny (speed-of-the-price-adjustment hypothesis) realizując bardzo obszerne badania empiryczne, dotyczące wpływu opóźnień stopy zwrotu z ważonego wartościami rynkowymi portfela indeksowego na efekt estymacji modelu Sharpe'a, na przykładzie 1115 spółek z giełd NYSE (New York Stock Exchange) oraz AMEX (American Stock Exchange). Stwierdzili, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy szybkości dostosowania ceny, ponieważ papiery notowane na mniej płynnym rynku (w tym przypadku AMEX), wykazały istotne opóźnienia w stosunku do portfela rynkowego⁵. Zgodnie z literaturą przedmiotu, problem opóźnień w dostosowaniu ceny papieru wartościowego do napływającej na rynek informacji (price-adjustment delays) jest jedną z poważniejszych konsekwencji występowania zakłóceń w procesach transakcyjnych i związany jest głównie ze zjawiskiem niesynchronizacji transakcji I rodzaju, jak również z problemem rozpiętości cen sprzedaży/kupno oraz innych kosztów transakcyjnych, chociaż niektórzy autorzy stwierdzają, że oprócz wpływu niesynchronizacji transakcji są inne czynniki (price-adjustment delay factors), które powodują wspomniane opóźnienia⁶. Francis (1975) dokonał próby identyfikacji papierów wartościowych z tendencją do opóźnień lub wyprzedzeń stóp zwrotu w stosunku do stopy zwrotu z portfela rynkowego, poddając analizie 770 spółek z giełdy nowojorskiej NYSE w okresie styczeń 1958-grudzień 1967⁷. Theobald i Price (1984) zwrócili uwagę na istotny aspekt trudności w badaniach empirycznych, polegających na bezpośredniej analizie opóźnień w reakcji cen akcji na nową informację rynkową, z powodu „nieobserwowalności” opóźnień. Oznacza to, że formułując hipotezę badawczą, dotyczącą występowania ewentualnych opóźnień, nie jesteśmy w stanie ściśle określić i zapisać w sposób formalny ich przyczyny⁸. Obszerne badania Mecha

⁴ E.F. Fama: Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work. „Journal of Finance” 1970, No. 15, s. 388.

⁵ G.A. Hawawini, A. Vora: Evidence of Intertemporal Systematic Risks in the Daily Price Movements of NYSE and AMEX Common Stocks. „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1980, Vol. 15, No. 2.

⁶ M. Atchison, K. Butler, R. Simonds: Nonsynchronous Security Trading and Market Index Autocorrelation. „Journal of Finance” 1987, No. 42, s. 111.

⁷ J.C. Francis: Intertemporal Differences in Systematic Stock Price Movements. „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1975, Vol. 10, No. 2.

⁸ M. Theobald, V. Price: Seasonality Estimation in Thin Markets. „Journal of Finance” 1984, Vol. 39, No. 2.

(1993) dotyczyły weryfikacji hipotezy badawczej o przyczynach autokorelacji w szeregach stóp zwrotu z portfeli inwestycyjnych. W konkluzji Mech stwierdził, że podstawową przyczyną wspomnianych autokorelacji są koszty transakcyjne, powodujące opóźnienia w dostosowywaniu cen papierów wartościowych do napływającej na rynek informacji oraz zaproponował dość radykalne wnioski odnośnie do braku efektywności informacyjnej rynku, z powodu niepełnego odzwierciedlenia przez cenę rynkową wszystkich dostępnych informacji⁹.

Temat opóźnień w dostosowaniu cen do napływającej na rynek informacji pojawia się również w polskiej literaturze przedmiotu. Przykładem może być praca Wójtowicza (2010), poddająca analizie znaczenie wielkości obrotów dla szybkości reakcji cen akcji spółek, notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A., na pojawiające się na rynku nowe informacje. Badania dotyczyły spółek notowanych w systemie ciągłym, na rynku podstawowym, w okresie styczeń 2003-grudzień 2009. Uzyskane przez autora wyniki potwierdziły, że napływające na rynek informacje szybciej znajdują odzwierciedlenie w cenach akcji spółek o wysokich obrotach¹⁰.

3. Pomiar szybkości dostosowania cen akcji do zmian w zbiorze informacji rynkowych

Trudności empiryczne w oszacowaniu opóźnień w reakcji cen papierów wartościowych na napływającą na rynek informację przyczyniły się do powstania miar opóźnień, nazywanych też czasem miarami szybkości dostosowania cen (measures of speed of adjustment). Miary te mogą być wyznaczone z wykorzystaniem dziennych stóp zwrotu z papierów wartościowych oraz portfeli pełniących rolę portfela odniesienia¹¹ lub indeksów giełdowych, pełniących rolę portfela rynkowego¹². Chordia i Swaminathan (2000) zaproponowali miarę szybkości dostosowania cen papierów wartościowych do zmian w zbiorze informacji rynkowych (measure of speed of adjustment), która jest pewną modyfi-

⁹ T.S. Mech: Portfolio Return Autocorrelation. „Journal of Financial Economics” 1993, No. 34, s. 343.

¹⁰ T. Wójtowicz: Wielkość obrotu a wzajemne korelacje stóp zwrotu spółek z GPW w Warszawie. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia. Skuteczne Inwestowanie” 2010, Vol. 29, nr 616.

¹¹ G. McQueen, M. Pinegar, S. Thorley: Delayed Reaction to Good News and Cross-Autocorrelation of Portfolio Returns. „Journal of Finance” 1996, No. 51.

¹² T. Chordia, B. Swaminathan: Trading Volume and Cross-Autocorrelations in Stock Returns. „Journal of Finance” 2000, No. 55.

kacją miary z pracy (McQueen, Pinegar, Thorley 1996). Wykorzystali procedurę Dimsona (1979)¹³ korekty obciążenia parametru ryzyka systematycznego papieru wartościowego i , na rynku z problemem niesynchronizacji transakcji I rodzaju, stosując pomocniczą regresję wieloraką, z opóźnieniem i wyprzedzeniem $L = 5$ (w przypadku estymacji na podstawie danych dziennych)

$$\hat{r}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \sum_{k=-5}^5 \hat{\beta}_{i,k} \cdot r_{M,t+k} \quad (1)$$

W równaniu regresji (1) zmienną objaśnianą jest dzienna stopa zwrotu z akcji i -tej, natomiast zmiennymi objaśniającymi są dzienne stopy zwrotu z portfela rynkowego M , postaci $r_{M,t+k}$, $k = -5, \dots, 5$, czyli odpowiednio z wyprzedzeniem (leading), równoczesne (contemporaneous) oraz opóźnione (lagged).

Wyjaśniając ideę miary szybkości dostosowania cen, zaproponowanej przez Chordię i Swaminathana, w sposób opisowy, w najprostszym przypadku $k = \pm 1$ zauważmy, porównując szybkość dostosowania cen dwóch papierów wartościowych A i B, że cena (stopa zwrotu) akcji B szybciej reaguje na zmiany w zbiorze informacji rynkowych niż cena (stopa zwrotu) akcji A wtedy i tylko wtedy, gdy w przypadku „równoczesnych” (contemporaneous) współczynników beta zachodzi nierówność $\beta_{B,0} > \beta_{A,0}$, natomiast w przypadku „opóźnionych” (lagged) beta – nierówność $\beta_{B,-1} < \beta_{A,-1}$. Można zatem stwierdzić, że akcja B szybciej reaguje na pojawiającą się nową informację niż akcja A wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\beta_{B,-1}}{\beta_{B,0}} < \frac{\beta_{A,-1}}{\beta_{A,0}}$.

W przypadku regresji Dimsona (1979), określonej równaniem (1) dla $k = -5, \dots, 5$, współczynnik szybkości dostosowania ceny akcji i -tej ma postać¹⁴

$$x = \frac{\sum_{k=-5}^{-1} \beta_{i,k}}{\beta_{i,0}} \quad (2)$$

¹³ E. Dimson: Risk Measurement when Shares are Subject to Infrequent Trading. „Journal of Financial Economics” 1979, No. 7.

¹⁴ T. Chordia, B. Swaminathan: Op. cit., s. 931.

Stosując funkcję logistyczną, której argumentem jest współczynnik x określony wzorem (2), można uzyskać miarę szybkości dostosowania cen akcji i -tej w postaci¹⁵

$$DELAY_i = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (3)$$

W przypadku $x > 0$, miara (3) generuje wartości spełniające warunek: $DELAY_i > 0,5$, natomiast dla $x < 0$, wartości spełniające nierówność przeciwną: $DELAY_i < 0,5$. W kontekście interpretacji wartości miary (3), interesujące są podstawowe własności funkcji logistycznej. Po pierwsze, jest to funkcja rosnąca argumentu x . Po drugie, przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1)$. Wartości bliskie zera oznaczają szybsze dostosowanie (czyli mniejsze opóźnienie) cen akcji i -tej, natomiast wartości bliskie jedności – wolniejsze dostosowanie (czyli większe opóźnienie).

4. Charakterystyka danych i wyniki empiryczne na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A.

Tak zwane surowe dane (raw data) spółek oraz głównego indeksu giełdy warszawskiej WIG stanowiły ceny zamknięcia od 29.12.2006 do 30.12.2012, pobrane ze strony www.gpwinfostrafa. Na podstawie cen zamknięcia uzyskano dzienne logarytmiczne stopy zwrotu spółek oraz indeksu WIG. Selekcja spółek do bazy odbyła się poprzez identyfikację, które spółki były notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. 29.12.2006. Następnie usunięto z bazy spółki stwarzające różne problemy empiryczne (np. takie spółki, których notowania były przez dłuższy czas zawieszone, które przestały być notowane na GPW w badanym okresie, które przeszły podział akcji itp.). Ostatecznie do bazy weszło 185 spółek¹⁶. Ze strony www.bankier.pl (na podstawie serwisu Notoria) pobrano z raportów rocznych z lat 2006-2011 (czyli stan

¹⁵ Celem dodatkowej i rosnącej transformacji współczynnika (2) do postaci (3), zaproponowanej w pracy (Chordia, Swaminathan 2000) było uzyskanie wartości miary opóźnienia z przedziału $(0, 1)$.

¹⁶ Metodę tworzenia bazy danych, zawierającej stałą liczbę spółek w badanym okresie, zaproponował i uzasadnił Mech (T.S. Mech: Op. cit.). W literaturze można znaleźć również badania, prowadzone z wykorzystaniem baz danych, aktualizowanych dynamicznie, jednak nie jest to sposób odpowiedni dla ciągle rozwijającego się rynku polskiego.

na koniec danego roku) liczbę akcji. Wartość rynkową MV (Market Value), przypadającą na 1 akcję, stanowiła cena zamknięcia w ostatnim dniu roboczym grudnia danego roku. Następnie obliczono wartość rynkową MV każdej akcji, mnożąc liczbę akcji przez MV/1 akcję. Sortowanie spółek według wartości wskaźnika MV wykonano w dniach: 29.12.2006, 28.12.2007, 31.12.2008, 31.12.2009, 31.12.2010 oraz 30.12.2011. Łącznie wykonano sortowanie sześć razy. Spółki posortowane według wartości rynkowej MV były dzielone na trzy grupy:

- 1) spółki duże (BIG), dla których wartość rynkowa akcji MV była nie mniejsza od percentyla 70% (56 spółek),
- 2) spółki średnie (MEDIUM), dla których wartość rynkowa akcji MV była mniejsza od percentyla 70%, ale nie mniejsza od percentyla 30% (73 spółki),
- 3) spółki małe (SMALL), dla których wartość rynkowa akcji MV była mniejsza od percentyla 30% (56 spółek).

Następnie wybrano te spółki, które w całym analizowanym okresie grudzień 2006-grudzień 2011 były w tej samej grupie. W grupie BIG znalazło się 35 spółek, w grupie MEDIUM – 28 spółek, natomiast w grupie SMALL – 18 spółek.

Pomiar szybkości dostosowania cen akcji poprzez wyznaczenie wartości miary (3) wykonano, w badanym okresie styczeń 2007-grudzień 2012, dla 10 największych spółek z grupy BIG oraz dla 10 najmniejszych spółek z grupy SMALL, z wykorzystaniem dziennych logarytmicznych stóp zwrotu. W pomocniczym równaniu regresji Dimsona (1) zmiennymi objaśniającymi były dzienne logarytmiczne stopy zwrotu z indeksu WIG, odpowiednio z wyprzedzeniem, równoczesne oraz opóźnione. Podsumowanie wyników estymacji pomocniczych modeli regresji postaci (1) przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Podsumowanie wyników estymacji pomocniczych modeli regresji postaci (1) (styczeń 2007-grudzień 2012)

Lp.	Symbol	$\hat{\beta}_{i,-5}$	$\hat{\beta}_{i,-4}$	$\hat{\beta}_{i,-3}$	$\hat{\beta}_{i,-2}$	$\hat{\beta}_{i,-1}$	$\hat{\beta}_{i,0}$	$\hat{\beta}_{i,1}$	$\hat{\beta}_{i,2}$	$\hat{\beta}_{i,3}$	$\hat{\beta}_{i,4}$	$\hat{\beta}_{i,5}$	$\overline{R^2}$
Grupa BIG													
1	BRE					**	***	***			**	*	0,56
2	BZW						***				**		0,48
3	BHW		**			***	***	*					0,33
4	KGH				***		***	**	**				0,52
5	PEO				***	**	***						0,68
6	PGN					***	***		**				0,28
7	PKN			*	*	*	***				***		0,58
8	PKO	***		*		**	***						0,70
9	TPS		**			**	***	**				**	0,26
10	ZWC	**					***						0,03
Grupa SMALL													
1	BCM		**		**	**	***	**			***		0,05
2	CFL						***	**					0,07
3	EFK			*			***	**					0,09
4	ENP	**					***			*			0,09
5	GMM		*	*	**		***						0,04
6	MZA						***				*		0,03
7	PMD					***	***	**				***	0,09
8	U2K	**				**	***						0,07
9	VRT		**				***					***	0,06
10	WLB						***						0,05

* Istotność parametru na poziomie 0,10; ** istotność parametru na poziomie 0,05; *** istotność parametru na poziomie 0,01.

Wyniki przedstawione w tabeli 1 wykazały niską jakość estymowanych modeli pomocniczych postaci (1), zwłaszcza w przypadku spółek z grupy SMALL ($\overline{R^2}$). Może wydawać się, że jest to związane z faktem ustalenia przez Chordię i Swaminathana (2000) dość dużej wartości stałej $L = 5$, odpowiadającej za wybór maksymalnego rzędu opóźnienia oraz wyprzedzenia zmiennej rynkowej. Należy podkreślić, że wartość stałej L jest czasem wybierana z uwzględnieniem poziomu „słabości” (degree of thinness) papieru wartościowego oraz /lub portfela rynkowego, ale z pewnością nie jest to ścisłe określenie. Dimson (1979) proponował stałą $L = 3$, podczas gdy np. Busse (1999) stwierdził istotność opóźnienia i wyprzedzenia tylko rzędu pierwszego, czyli dla $L = 1$. Jednak estymacja modeli pomocniczych (1), w skorygowanej wersji dla $L = 3$, nie poprawiła ich jakości pod względem dopasowania oraz istotności statystycznej parametrów strukturalnych. Wartości skorygowanego współczynnika determinacji $\overline{R^2}$ kształtowały się na porównywalnym, niskim poziomie¹⁷.

Ponadto, uzyskano wyraźną istotność statystyczną jedynie w przypadku parametru $\hat{\beta}_{i,0}$, stojącego przy zmiennej rynkowej $r_{M,t}$, we wszystkich modelach pomocniczych. Nie zaobserwowano natomiast wyraźnych wzorców stóp zwrotu, związanych z dniem tygodnia. Wydaje się, że otrzymane wyniki istotności parametrów w przypadku zmiennych opóźnionych i z wyprzedzeniem są raczej przypadkowe, zarówno w grupie spółek BIG, jak i SMALL.

Tabela 2 zawiera oszacowane wartości współczynnika (2) oraz miary (3) szybkości dostosowania ceny akcji do napływającej na rynek informacji (w każdej z grup, spółki w kolejności alfabetycznej).

Tabela 2

Wartości współczynnika (2) oraz miary (3) szybkości dostosowania ceny akcji do zmian w zbiorze informacji rynkowych (styczeń 2007-grudzień 2012)

Lp.	Grupa BIG	x	$DELAY$	Grupa SMALL	x	$DELAY$
1	2	3	4	5	6	7
1	BRE	0,073	0,518	BETACOM	0,861	0,703
2	BZWBK	-0,069	0,483	CASHFLOW	0,183	0,546
3	HANDLOWY	0,103	0,526	EFEKT	0,325	0,581
4	KGHM	-0,070	0,483	ENAP	0,231	0,557
5	PEKAO	-0,142	0,465	GREMMEDIA	0,717	0,672
6	PGNIG	-0,106	0,474	MUZA	0,066	0,517
7	PKNORLEN	-0,101	0,475	PERMEDIA	0,519	0,627

¹⁷ Szczegółowe wyniki estymacji modeli pomocniczych (1), dla stałej $L = 3$, są dostępne na życzenie.

cd. tabeli 2

1	2	3	4	5	6	7
8	PKOBP	-0,109	0,473	UNIMA	0,385	0,595
9	TPSA	-0,249	0,438	VARIANT	0,177	0,544
10	ZYWIEC	-0,302	0,425	WILBO	0,341	0,584
	Średnia	-0,097	0,476	średnia	0,381	0,593

W grupie SMALL najmniejszych (i najmniej płynnych) spółek uzyskano jednolite wyniki w postaci dodatniej wartości współczynnika (2) oraz miary opóźnienia $DELAY_i > 0,5$. Wartości średnie współczynnika (2) i miary (3) wyniosły odpowiednio $0,381 > 0$ oraz $0,593 > 0,5$. W grupie dużych spółek (BIG), otrzymano ujemne wartości współczynnika (2) oraz wartości miary $DELAY_i < 0,5$, jednak wyniki nie są tak jednorodne, ponieważ w przypadku dwóch banków: BRE oraz HANDLOWY, stwierdzono wartości współczynnika (2) oraz miary (3) typowe dla spółek mniejszych. Może to jednak wiązać się z faktem, że banki stanowią specyficzny sektor, najczęściej dużych spółek, w przypadku których reakcja na zmiany w zbiorze informacji rynkowych może być wolniejsza, w porównaniu z innymi dużymi spółkami. Wartości średnie współczynnika (2) i miary (3) w grupie spółek dużych wyniosły odpowiednio $-0,097 < 0$ oraz $0,476 < 0,5$.

Podsumowując wyniki z tabeli 2 należy zauważyć, że spółki małe na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. charakteryzują się większymi wartościami miary opóźnienia (3), co oznacza, że ich ceny wolniej dostosowują się do zmian w zbiorze informacji rynkowych. Wyniki są zgodne z wnioskami autorów miary (3), uzyskanymi na podstawie badań empirycznych przeprowadzonych na rynku amerykańskim w latach 1963-1996.

5. Alternatywna procedura szacowania pomocniczych modeli regresji – wyniki empiryczne

W celu dokonania analizy odporności otrzymanych wyników empirycznych na wybór procedury estymacji parametrów beta pomocniczych modeli regresji, przeprowadzono szacowanie modeli liniowych z jedną zmienną objaśniającą postaci (4), jako alternatywnych wobec modelu Dimsona (1)

$$\hat{r}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_{i,k} \cdot r_{M,t+k}, \quad k = -5, -4, -3, -2, -1, 0 \quad (4)$$

Następnie uzyskane wartości sześciu estymatorów parametrów beta dla każdej akcji i -tej podstawiono do wzoru (2) na współczynnik szybkości dostosowania ceny x oraz wyznaczono wartości miary opóźnienia (3). Wyniki obliczeń przedstawia tabela 3. Porównując efekty estymacji parametrów regresji pomocniczych z wynikami prezentowanymi w tabeli 1 nie stwierdzono poprawy jakości modeli, a nawet niewielkie pogorszenie wyników w kilku przypadkach, szczególnie dla spółek BRE, PEO, PKN, PKO, TPS, ZWC z grupy BIG. Alternatywna metoda estymacji nie poprawiła też jakości modeli pod względem dopasowania. W obu grupach spółek najlepsze okazały się modele (4), w których zmienną objaśniającą była równoczesna (dla $k=0$) stopa zwrotu z indeksu WIG. Wartości współczynnika determinacji R^2 tych modeli kształtowały się na prawie identycznym poziomie, jak wartości skorygowanego współczynnika determinacji $\overline{R^2}$, raportowane dla poszczególnych spółek w tabeli 1¹⁸.

Tabela 3

Wyniki estymacji pomocniczych modeli regresji postaci (4) oraz wartości współczynnika (2) i miary (3) szybkości dostosowania ceny akcji do zmian w zbiorze informacji rynkowych (styczeń 2007-grudzień 2012)

	Lp.	Symbol	$\hat{\beta}_{i,-5}$	$\hat{\beta}_{i,-4}$	$\hat{\beta}_{i,-3}$	$\hat{\beta}_{i,-2}$	$\hat{\beta}_{i,-1}$	$\hat{\beta}_{i,0}$	x	$DELAY$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Grupa BIG	1	BRE					***	***	1,181	0,765
	2	BZW					*	***	1,146	0,735
	3	BHW		*			***	***	1,213	0,771
	4	KGH				***	***	***	1,018	0,735
	5	PEO				***		***	0,939	0,719
	6	PGN			*			***	0,975	0,726
	7	PKN				**		***	1,238	0,728
	8	PKO						***	0,985	0,727
	9	TPS						***	0,813	0,693
	10	ZWC						***	0,772	0,684
								średnia	1,028	0,728
Grupa SMALL	1	BCM		*		*	***	***	2,044	0,885
	2	CFL		**				***	1,301	0,786
	3	EFK			*		*	***	1,443	0,809
	4	ENP	*					***	1,334	0,791
	5	GMM			**			***	1,928	0,873
	6	MZA						***	1,172	0,763

¹⁸ Z powodu ograniczonej objętości pracy, wartości współczynnika determinacji modeli pomocniczych nie zostały przedstawione w tabeli 3, jednak są dostępne na życzenie.

cd. tabeli 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	7	PMD					***	***	1,658	0,840
	8	U2K	*				***	***	1,520	0,821
	9	VRT		*			*	***	1,292	0,786
	10	WLB		**				***	1,484	0,815
								średnia	1,518	0,817

Spółki w kolejności alfabetycznej: * istotność parametru na poziomie 0,10; ** istotność parametru na poziomie 0,05; *** istotność parametru na poziomie 0,01.

Podsumowując wyniki z tabeli 3 w kontekście analizy opóźnień w dostosowaniu cen akcji do zmian w zbiorze informacji rynkowych należy podkreślić, że z powodu istotnej pod względem metodologicznym zmiany procedury szacowania regresji pomocniczych, otrzymano odmienne wartości współczynnika (2), w porównaniu z wartościami przedstawionymi w tabeli 2¹⁹. Wartości miary (3) kształtują się również na nieco wyższym poziomie w przypadku wszystkich spółek, jednak miara (3) szereguje spółki w analogicznej kolejności, niezależnie od wyboru metody estymacji pomocniczych parametrów beta. Wyniki sortowania spółek (rosnąco) według wartości miary (3), uzyskanych z wykorzystaniem alternatywnych metod estymacji pomocniczych modeli regresji postaci (1) lub (4), przedstawia tabela 4.

Tabela 4

Spółki posortowane rosnąco według wartości miary (3) szybkości dostosowania ceny akcji do zmian w zbiorze informacji rynkowych (styczeń 2007-grudzień 2012)

Lp.	Grupa BIG	DELAY Regresja (1)	Grupa BIG	DELAY Regresja (4)	Grupa SMALL	DELAY Regresja (1)	Grupa SMALL	DELAY Regresja (4)
1	ZWC	0,425	ZWC	0,684	MZA	0,517	MZA	0,763
2	TPS	0,438	TPS	0,693	VRT	0,544	VRT	0,786
3	PEO	0,465	PEO	0,719	CFL	0,546	CFL	0,786
4	PKO	0,473	PGN	0,726	ENP	0,557	ENP	0,791
5	PGN	0,474	PKO	0,727	EFK	0,581	EFK	0,809
6	PKN	0,475	PKN	0,728	WLB	0,584	WLB	0,815
7	BZW	0,483	BZW	0,735	U2K	0,595	U2K	0,821
8	KGH	0,483	KGH	0,735	PMD	0,627	PMD	0,840
9	BRE	0,518	BRE	0,765	GMM	0,672	GMM	0,873
10	BHW	0,526	BHW	0,771	BCM	0,703	BCM	0,885

Regresje pomocnicze wyznaczone na podstawie procedury Dimsona (1) lub na podstawie modelu (4).

¹⁹ W wyniku zastosowania procedury estymacji regresji pomocniczych postaci (4) nie uzyskano wartości ujemnych współczynnika (2) w grupie BIG.

Podsumowanie

Głównym celem pracy była prezentacja problemu opóźnień w reakcji cen papierów wartościowych na zmiany w zbiorze informacji rynkowych oraz pomiar szybkości dostosowania ceny akcji w grupach spółek dużych (BIG) oraz małych (SMALL), notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. w okresie od początku stycznia 2007 do końca grudnia 2012. Uzyskano wyniki zgodne z tymi z literatury przedmiotu, w szczególności z wynikami empirycznymi otrzymanymi przez autorów miary – Chordię i Swaminathana (2000). Ze względu na jednorodność wyników, zarówno współczynnik (2), jak i miara (3) wydają się użytecznymi narzędziami do praktycznego pomiaru istniejących, chociaż „nieobserwowalnych” opóźnień dostosowania cen akcji do napływających na rynek informacji. Z powodu ścisłych związków opóźnień dostosowania cen z problemem ograniczonej płynności aktywów kapitałowych, uzasadnionym celem dalszych badań na polskim rynku giełdowym jest analiza zależności pomiędzy miarą (3) oraz miarami aktywności transakcyjnej, np. względnym wolumenem.

Literatura

- Atchison M., Butler K., Simonds R.: Nonsynchronous Security Trading and Market Index Autocorrelation. „Journal of Finance” 1987, No. 42.
- Busse J.A.: Volatility Timing in Mutual Funds: Evidence from Daily Returns. „The Review of Financial Studies” 1999, No. 12.
- Chordia T., Swaminathan B.: Trading Volume and Cross-Autocorrelations in Stock Returns. „Journal of Finance” 2000, No. 55.
- Cohen K.J., Hawawini G.A., Maier S.F., Schwartz R.A., Whitcomb D.K.: Implications of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behaviour. „Journal of Finance” 1980, No. 35.
- Dimson E.: Risk Measurement when Shares are Subject to Infrequent Trading. „Journal of Financial Economics” 1979, No. 7.
- Fama E.F.: Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work. „Journal of Finance” 1970, No. 15.
- Fama E.F., Fisher L., Jensen M.C., Roll R.: The Adjustment of Stock Prices to New Information. „International Economic Review” 1969, Vol. 10, No. 1.
- Francis J.C.: Intertemporal Differences in Systematic Stock Price Movements. „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1975, Vol. 10, No. 2.
- Hawawini G.A., Vora A.: Evidence of Intertemporal Systematic Risks in the Daily Price Movements of NYSE and AMEX Common Stocks. „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1980, Vol. 15, No. 2.

- Mech T.S.: Portfolio Return Autocorrelation. „Journal of Financial Economics” 1993, No. 34.
- McQueen G., Pinegar M., Thorley S.: Delayed Reaction to Good News and Cross-Autocorrelation of Portfolio Returns. „Journal of Finance” 1996, No. 51.
- Olbryś J.: Tarcie w procesach transakcyjnych i jego konsekwencje. W: Inwestycje finansowe i ubezpieczenia. Tendencje światowe a rynek polski. Prace Naukowe. Uniwersyt Ekonomiczny, Wrocław 2012, Vol. 254.
- Theobald M., Price V.: Seasonality Estimation in Thin Markets. „Journal of Finance” 1984, Vol. 39, No. 2.
- Wójtowicz T.: Wielkość obrotu a wzajemne korelacje stóp zwrotu spółek z GPW w Warszawie. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia. Skuteczne Inwestowanie” 2010, Vol. 29, nr 616.

MEASURING OF EQUITY PRICES ADJUSTMENT DELAY TO NEW INFORMATION IN THE WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary

In the literature, price adjustment delay is treated as one of the consequences of market frictions. The problem was probably first defined in (Fama, Fisher, Jensen, Roll, 1969), where the authors dealt with adjustment delay of asset prices to new information. Fama (1970) used the notion of price adjustment delay in the context of the semi-strong form of the Efficient Market Hypothesis (EMH). Chordia and Swaminathan (2000) proposed a measure of equity prices adjustment delay to information. To incorporate the nonsynchronous trading effect into the measure, they employed Dimson's (1979) beta regression procedure. The main goal of this paper is to investigate the problem of asset prices adjustment delay in the case of stocks from the Warsaw Stock Exchange, in the period Jan 2007-Dec 2012.

Ewa Pośpiech

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

OCENA PORTFELI KONSTRUOWANYCH NA PODSTAWIE METODY AHP – UJĘCIE KLASYCZNE I FUNDAMENTALNE

Wprowadzenie

Przy wyborze wariantu decyzyjnego w sytuacji, gdy decydent patrzy na swój wybór przez pryzmat wielu kryteriów, zastosowanie narzędzi wspomagających metodyczne podejście do zagadnienia jest kluczowe.

Podmiot zainteresowany inwestowaniem w akcje może wspomagać się różnymi metodami – klasycznymi, analizy technicznej, analizy fundamentalnej. Jednym z najczęściej stosowanych podejść jest podejście klasyczne, które oparte jest na standardowych charakterystykach: stopie zwrotu oraz wariancji stopy zwrotu. Można jednak rozważać także inne charakterystyki (np. współczynnik asymetrii czy współczynnik β), którymi decydent może się wspomagać przy dokonywaniu oceny badanego obiektu (spółki). Traktując przytoczone charakterystyki jak kryteria, przez pryzmat których dokonuje się wyboru najlepszych spółek, można w analizie portfelowej wykorzystać metody wielokryterialne. Ponadto, wykorzystując podejście wielokryterialne, można skonstruować portfel fundamentalny, w którym jako kryteria oceny spółek wykorzystywane są wybrane wskaźniki określające ich kondycję ekonomiczno-finansową. Jedną z wielu metod wielokryterialnego wspomagania decyzji¹, umożliwiającą uporządkowanie wariantów decyzyjnych jest metoda AHP (Analytic Hierarchy Process).

¹ Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym. Red. T. Trzaskalik. PWE, Warszawa 2006; T.L. Saaty: Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. „Management Science” 1986, Vol. 32, No. 7, s. 841-855; T.L. Saaty: Fundamentals of Decisions Making and Priority and Theory with the Analytical Hierarchy Process. RWS Publications, Pittsburgh 1994; C. Zopounidis, M. Doumpos: Multi-criteria Decision Aid in Financial Decision Making: Methodologies and Literature Review. „Journal of Multi-Criteria Decision Analysis” 2002, No. 11, s. 167-186.

Celem artykułu jest wykorzystanie tej wielokryterialnej metody do uzyskania rankingu rozpatrywanych spółek, który posłuży do skonstruowania i oceny uzyskanych portfeli papierów wartościowych.

Artykuł składa się z trzech części. W pierwszej z nich zamieszczony jest opis metody AHP wykorzystywanej w analizach empirycznych, druga i trzecia część zawierają wyniki analiz, obejmujące otrzymane rankingi spółek oraz wyznaczone na ich podstawie portfele, w ujęciu klasycznym oraz fundamentalnym.

1. Analiza wielokryterialna za pomocą metody AHP

Podejmowanie decyzji wielokryterialnych oznacza dokonanie wyboru jakiegoś wariantu decyzyjnego (obiektu) w sytuacji, gdy dysponuje się zbiorem m możliwych wariantów, a decydent chce wybrać najkorzystniejszy z nich, z punktu widzenia n kryteriów, którymi w procesie podejmowania decyzji ma zamiar się kierować. Każdemu kryterium odpowiada ustalony kierunek optymalizacji (maksymalizacja lub minimalizacja), a ważność każdego z nich określana jest poprzez przyporządkowanie im wag w_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – wagi są nieujemne, a ich suma jest równa jeden.

Jedną z metod wspomagającą podejmowanie decyzji wielokryterialnej jest metoda AHP. Jest to metoda, która umożliwia porównywanie między sobą dowolnych dwóch wariantów decyzyjnych w ramach każdego kryterium oraz każdych dwóch spośród rozważanych kryteriów. Dzięki zastosowaniu tej metody uzyskiwany jest ranking wariantów decyzyjnych. Wyróżnia się kilka etapów metody².

Etap początkowy to konstrukcja macierzy porównań parami poszczególnych wariantów decyzyjnych w ramach każdego kryterium. Tworzone są odpowiednie macierze $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(n)}$ oraz macierz $\mathbf{A}^{(0)}$, która jest macierzą porównań parami kryteriów.

Macierze porównań $\mathbf{A}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, tworzone są poprzez nadanie konkretnym porównaniom ocen kryterialnych pewnej jakościowej oceny, której z kolei przypisuje się pewną wartość numeryczną. Przykładowy sposób takiego przypisania podaje tabela 1.

² T.L. Saaty: Axiomatic Foundation..., op. cit.; Fundamentals of Decisions..., op. cit.

Tabela 1

Rangi przy porównaniach w metodzie AHP

Ocena słowna (werbalna, jakościowa)	Ocena numeryczna (ranga)
Równoważny (tak samo preferowany)	1
Równoważny do nieznacznie preferowany	2
Nieznacznie preferowany	3
Nieznacznie do silnie preferowany	4
Silnie preferowany	5
Silnie do bardzo silnie preferowany	6
Bardzo silnie preferowany	7
Bardzo silnie do wyjątkowo preferowany	8
Wyjątkowo preferowany	9

Źródło: T.L. Saaty: Fundamentals of Decisions Making and Priority and Theory with the Analytical Hierarchy Process. RWS Publications, Pittsburgh 1994.

Przyjmując, że oceny kryterialne b_{ik} wyrażone są ilościowo oraz że kierunek optymalizacji dla każdego kryterium to MAX (w przypadku minimalizacji można zmienić kierunek optymalizacji mnożąc wartości b_{ik} przez -1), dla każdego kryterium wyznacza się rozstęp. W ramach każdego z kryteriów, przedział, którego końcami są najmniejsza i największa wartość danych ocen kryterialnych, dzielony jest na dziewięć podprzedziałów, a każdemu z nich przyporządkowuje się odpowiednio kolejne rangi. Porównanie wariantu i z wariantem j w ramach kryterium k polega na wyznaczeniu różnicy $b_{ik} - b_{jk}$, której moduł wskazuje podprzedział, do którego należy ją przypisać. Macierz porównań $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$) to macierz elementów następującej postaci

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \text{ranga}, & \text{gdy } b_{ik} - b_{jk} \geq 0 \\ 1/\text{ranga}, & \text{gdy } b_{ik} - b_{jk} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

W celu wyznaczenia macierzy porównań parami kryteriów $A^{(0)}$ wartości ocen kryterialnych wariantów decyzyjnych zastępowane są wagami w_k , $k = 1, 2, \dots, n$, przyporządkowanymi każdemu z kryteriów.

Kolejny etap metody to normalizacja elementów macierzy $\mathbf{A}^{(k)}$ dokonywana za pomocą przekształcenia

$$\hat{a}_{ij}^{(k)} = \frac{a_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}^{(k)}} \quad (2)$$

Znormalizowana macierz $\hat{\mathbf{A}}^{(k)} = [\hat{a}_{ij}^{(k)}]$ jest podstawą wyznaczenia kolumnowego wektora indywidualnych indeksów preferencji $\mathbf{S}^{(k)} = [s_i^{(k)}]$, $i = 1, 2, \dots, m$; składowe tego wektora liczone są według wzoru

$$s_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^m \hat{a}_{ij}^{(k)}}{m} \quad (3)$$

Wartości te pozwalają uporządkować rozważane warianty decyzyjne (im większa wartość, tym wyższa pozycja w rankingu). Podobnie uzyskuje się ranking dla kryteriów – wartość m (liczba wariantów decyzyjnych) zastępowana jest wartością n (liczba kryteriów), a w miejsce k podstawia się zero.

Końcowy etap metody AHP to stworzenie rankingu wielokryterialnego dla wariantów decyzyjnych. W tym celu wyznaczany jest wektor wielokryterialnych indeksów preferencji $\mathbf{P} = [p_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, którego składowe liczone są według wzoru

$$p_i = \sum_{k=1}^n s_k^{(0)} s_i^{(k)} \quad (4)$$

Im większa wartość p_i , tym dany wariant jest wyżej uplasowany.

2. Tworzenie portfela akcji na podstawie analizy wielokryterialnej – podejście klasyczne

W rozważaniach wykorzystane zostało dwojake podejście: klasyczne, w którym jako kryteria uwzględnione zostały mierniki klasyczne oraz fundamentalne, w którym wzięto pod uwagę wybrane mierniki charakteryzujące kondycję ekonomiczno-finansową spółek. Do badań empirycznych wykorzystane zostały dane z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie S.A. Wykorzystano wartości kursu zamknięcia wybranych spółek giełdowych, które tworzyły indeks WIG20 we wrześniu 2012 roku. Rozważano okres od 03.10.2011

do 28.09.2012. W zasadniczych rozważaniach uwzględniono 17 spółek o dodatniej historycznej wartości stopy zwrotu R oraz te, dla których zgromadzono dane dla wybranych wskaźników ekonomiczno-finansowych.

Jako kryteria przyjęte zostały klasyczne mierniki wykorzystywane w analizie portfelowej: oczekiwana stopa zwrotu R (decydent zainteresowany jest tymi spółkami, które cechuje maksymalna stopa zwrotu), odchylenie standardowe stopy zwrotu s (inwestora interesują walory, które cechuje minimalne ryzyko mierzone wartością s), współczynnik β (jako uzupełniająca miara ryzyka) oraz współczynnik asymetrii A (korzystniejsza dla inwestora jest asymetria prawostronna, gdyż prawdopodobieństwo spadku stopy zwrotu jest niewielkie, zaś wzrostu – znaczne).

W podejściu wykorzystującym mierniki klasyczne posłużono się poniższą tabelą wartości, w której dla rozpatrywanych spółek zamieszczono wybrane charakterystyki.

Tabela 2

Wartości klasycznych mierników ocen dla wybranych spółek

	Kryteria			
	R	s	β	A
Kierunek optymalizacji	max	min	min	max
Waga kryterium	w_1	w_2	w_3	w_4
Spółki	Oceny kryterialne			
ASSECOPOL	0,085462	1,747035	0,726178	0,120007
BOGDANKA	0,103092	1,578668	0,770668	0,299923
BORYSZEW	0,158956	2,846157	1,309194	0,711198
BRE	0,135261	1,886383	1,107877	0,423819
HANDLOWY	0,158032	2,151047	0,983937	0,319535
JSW	0,095783	2,137193	1,251442	0,297266
KERNEL	0,065221	2,404719	0,945399	0,028685
KGHM	0,204257	2,780444	1,90458	-0,75031
LOTOS	0,144859	2,426037	1,407876	0,054121
PEKAO	0,117631	2,096202	1,533419	0,197482
PGE	0,043333	1,544092	0,840136	0,37981
PGNIG	0,017309	1,58484	0,628877	0,105327
PKNORLEN	0,123735	1,975953	1,254414	0,539367
PKOBP	0,07241	1,793765	1,309541	0,15765
SYNTHOS	0,237108	2,182361	1,021914	0,10472
TAURONEPE	0,04506	1,561005	0,800387	0,509249
TPSA	0,028795	1,243703	0,421717	0,27145

Określenie subiektywnych preferencji dotyczących ważności poszczególnych kryteriów dokonuje się poprzez przyporządkowanie im wag. W tabeli 3 przedstawiono wartości indeksów preferencji dla rankingu wielokryterialnego oraz odpowiadające im rankingi dla dwóch zestawów wag: pierwszy zestaw uwzględnia znaczący wpływ dwóch podstawowych mierników, jakimi są stopa zwrotu oraz jej odchylenie, natomiast w drugim zestawie wagę równą zero przyporządkowuje się kryterium związanemu z dodatkową miarą ryzyka (współczynnik β), zaś pozostałym kryteriom przypisuje się takie same wagi.

Tabela 3

Wartości indeksów preferencji dla rankingu wielokryterialnego
i ranking spółek dla wybranych zestawów wag (podejście klasyczne)

Spółka	$w_1 = 0,4, w_2 = 0,3$ $w_3 = 0,1, w_4 = 0,2$		$w_1 = 1/3, w_2 = 1/3$ $w_3 = 0, w_4 = 1/3$	
ASSECOPOL	0,041368	13	0,039062	12
BOGDANKA	0,057654	8	0,061997	8
BORYSZEW	0,083683	3	0,132786	1
BRE	0,063537	5	0,076056	4
HANDLOWY	0,073137	4	0,063429	7
JSW	0,035473	14	0,046976	10
KERNEL	0,021292	17	0,022052	17
KGHM	0,097362	2	0,029771	15
LOTOS	0,051762	9	0,029471	16
PEKAO	0,042572	12	0,039809	11
PGE	0,048217	11	0,071907	5
PGNIG	0,034565	15	0,037443	13
PKNORLEN	0,058752	7	0,097696	2
PKOBP	0,033571	16	0,036349	14
SYNTHOS	0,143256	1	0,05511	9
TAURONEPE	0,051017	10	0,093721	3
TPSA	0,062783	6	0,066365	6

Powstałe rankingi różnią się dość istotnie, co oznacza, iż preferencje decydenta dotyczące ważności wybranych kryteriów mają istotny wpływ na ocenę spółek. Powyższe zestawienia mogą posłużyć do skonstruowania portfela, w którym znajdują się spółki plasujące się najwyżej w rankingu. Dołączając dodatkowy warunek ograniczający na udziały danych walorów w portfelu: $x_i \leq 0,3, i = 1, \dots, 17$, uzyskuje się następujące portfele (tabela 4).

Tabela 4

Portfele akcji uzyskane na podstawie rankingów (ujęcie klasyczne)

Spółka	Portfel 1	Spółka	Portfel 2
	$w_1 = 0,4, w_2 = 0,3$ $w_3 = 0,1, w_4 = 0,2$		$w_1 = 1/3, w_2 = 1/3$ $w_3 = 0, w_4 = 1/3$
BORYSZEW	0,3	BORYSZEW	0,3
HANDLOWY	0,1	BRE	0,1
KGHM	0,3	PKNORLEN	0,3
SYNTHOS	0,3	TAURONPE	0,3

Ze względu na zróżnicowanie rankingów na czołowych pozycjach, portfele składają się z różnych walorów; wspólnym walorem jest tylko spółka BORYSZEW, której udział w obydwu portfelach stanowi 30%. Zakładając, że decydent 03.10.2011 zainwestowałby kwotę ok. 100 000 zł w portfele o strukturze podanej w tabeli 4, można oszacować zysk, który inwestujący uzyskałby na koniec rocznej inwestycji 28.09.2012 (tabela 5).

Tabela 5

Stopy zysku portfeli

Wartość portfela	Portfel 1	Portfel 2
Wartość portfela w dniu 03.10.11 (zł)	100002,6	100006,2
Wartość portfela w dniu 28.09.12 (zł)/	134549,8	119501,6
Stopa zysku portfela (%)	34,58	19,50

Stopy zysku portfeli (na koniec września 2012 roku) wyznaczonych na podstawie rankingu uzyskanego za pomocą metody AHP, przy zastosowaniu jako kryteria mierników klasycznych, kształtowały się na poziomie 34,58% oraz 19,5%.

Dla porównania uzyskanych wyników skonstruowano klasyczny portfel Markowitza. Rozwiązano zadanie optymalizacyjne postaci

$$\begin{aligned}
 S_p^2 &= \sum_{i=1}^{17} \sum_{j=1}^{17} x_i x_j \operatorname{cov}(x_i, x_j) \rightarrow \min \\
 R_p &\geq R_0 \\
 \sum_{i=1}^{17} x_i &= 1 \\
 x_i &\leq 0,3 \quad i = 1, \dots, 17, \\
 x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 17,
 \end{aligned}$$

gdzie:

S_p^2 – wariancja portfela,

x_i, x_j – udziały akcji w portfelu,

$\text{cov}(x_i, x_j)$ – kowariancja między akcją i oraz akcją j ,

R_p – stopa zwrotu z portfela,

R_0 – ustalona przez inwestora wartość stopy zwrotu portfela, przy której minimalizuje się ryzyko portfela (jako R_0 przyjęto średnią stopę zwrotu rozważanych spółek).

Otrzymane wyniki zamieszczono w tabeli 6.

Tabela 6

Udziały akcji w optymalnym portfelu Markowitza (portfel 3)

Spółka	Udział w portfelu	Spółka	Udział w portfelu
ASSECOPOL	0,125354	PGNIG	0,207733
BOGDANKA	0,087355	PKNORLEN	0,043002
HANDLOWY	0,013712	PKOBP	0,014103
JSW	0,007856	SYNTHOS	0,043693
KERNEL	0,017779	TAURONEPE	0,055473
PGE	0,083942	TPSA	0,3

Zysk otrzymany na podstawie portfela Markowitza 28.09.2012 wynosił 5,07%, co w porównaniu z portfelem 1 i portfelem 2 (skonstruowanymi na podstawie rankingu wielokryterialnego) jest wynikiem znacznie gorszym.

3. Tworzenie portfela akcji na podstawie analizy wielokryterialnej – podejście fundamentalne

W podejściu opartym na analizie fundamentalnej, wykorzystano średnie wartości z lat 2011-2012 następujących wskaźników ekonomiczno-finansowych, które uwzględniono jako kryteria (wszystkie wskaźniki to stymulanty):

- wskaźnik zyskowności sprzedaży netto (zysk netto/przychody netto ze sprzedaży),
- wskaźnik rentowności aktywów ROA (zysk netto/aktywa ogółem),
- wskaźnik rentowności kapitału własnego ROE (zysk netto/kapitał własny),
- wskaźnik zysku na jedną akcję (zysk netto/liczba wyemitowanych akcji).

Posłużono się tabelą wartości mierników ocen (tabela 7).

Tabela 7

Wartości fundamentalnych mierników ocen dla wybranych spółek

	Kryteria			
	Zyskowność ze sprzedaży netto	ROA	ROE	Zysk na 1 akcję (zł)
Kierunek optymalizacji	max	max	max	max
Waga kryterium	w_1	w_2	w_3	w_4
Spółki	Oceny kryterialne			
ASSECOPOL	7,496	1,054	2,046	1,27
BOGDANKA	19,804	2,7	3,99	2,56
BORYSZEW	1,994	0,846	3,274	0,01
BRE	21,83	0,32	3,618	7,232
HANDLOWY	32,44	0,568	3,4	1,728
JSW	22,552	3,838	6,35	4,39
KERNEL	9,094	2,238	4,376	0,62
KGHM	36,252	6,942	9,978	10,704
LOTOS	1,082	0,438	0,874	0,708
PEKAO	27,322	0,512	3,486	2,858
PGE	17,524	2,156	3,122	0,682
PGNIG	2,136	0,354	0,552	0,022
PKNORLEN	1,954	1,022	2,284	1,396
PKOBP	23,116	0,51	4,208	0,774
SYNTHOS	13,31	4,492	7,496	0,154
TAURONEPE	6,23	1,282	2,246	0,206
TPSA	8,498	1,184	2,24	0,23

W tabeli 8 zamieszczono wyniki analiz przeprowadzonych za pomocą metody AHP. Uwzględniono dwa zestawy wag: w pierwszym potraktowano wszystkie cztery kryteria jako równorzędne, natomiast w drugim, kryterium pierwszemu i ostatniemu przypisano większą wagę niż dwóm pozostałym.

Tabela 8

Wartości indeksów preferencji dla rankingu wielokryterialnego i ranking spółek dla wybranych wag (podejście fundamentalne)

Spółka	$w_1 = 0,25, w_2 = 0,25$ $w_3 = 0,25, w_4 = 0,25$		$w_1 = 0,4, w_2 = 0,1$ $w_3 = 0,1, w_4 = 0,4$	
	2	3	4	5
ASSECOPOL	0,025845	11	0,027909	11
BOGDANKA	0,062032	7	0,060359	6
BORYSZEW	0,021773	15	0,01525	16

cd. tabeli 8

1	2	3	4	5
BRE	0,075397	4	0,110658	2
HANDLOWY	0,068351	5	0,098046	3
JSW	0,104071	2	0,092679	4
KERNEL	0,045898	9	0,029584	10
KGHM	0,248797	1	0,241539	1
LOTOS	0,017435	16	0,019282	15
PEKAO	0,062295	6	0,085238	5
PGE	0,041793	10	0,038913	9
PGNIG	0,014141	17	0,01489	17
PKNORLEN	0,025732	13	0,025788	12
PKOBP	0,04891	8	0,056904	7
SYNTHOS	0,086542	3	0,03914	8
TAURONEPE	0,025238	14	0,020311	14
TPSA	0,025751	12	0,023511	13

W tym przypadku, mimo różnych wag przyporządkowanych kryteriom, rankingi nie różnią się tak bardzo jak w ujęciu klasycznym, stąd też struktura portfela jest mniej zróżnicowana. Uzyskane portfele, przy dodatkowym warunku: $x_i \leq 0,3$, $i = 1, \dots, 17$, przedstawiono w tabeli 9.

Tabela 9

Portfele akcji uzyskane na podstawie rankingów (ujęcie fundamentalne)

Spółka	Portfel 4	Spółka	Portfel 5
	$w_1 = 0,25, w_2 = 0,25$ $w_3 = 0,25, w_4 = 0,25$		$w_1 = 0,4, w_2 = 0,1$ $w_3 = 0,1, w_4 = 0,4$
BRE	0,1	BRE	0,3
JSW	0,3	HANDLOWY	0,3
KGHM	0,3	JSW	0,1
SYNTHOS	0,3	KGHM	0,3

Dla stworzonych portfeli obliczono stopę zysku (tabela 10).

Tabela 10

Stopy zysku portfeli fundamentalnych

Wartość portfela	Portfel 4	Portfel 5
Wartość portfela w dniu 03.10.11 (zł)	100041	100009,4
Wartość portfela w dniu 28.09.12 (zł)/ Stopa zysku portfela (%)	128889,7 28,90	126553,8 26,55

Stopy zysku otrzymanych portfeli są dosyć wysokie; w porównaniu z portfelami uzyskanymi za pomocą wielokryterialnego podejścia klasycznego ich wartości są: w porównaniu do portfela 1 nieco niższe, natomiast w porównaniu z portfelem 2 – wyższe. Ponadto, każdy z portfeli 1, 2, 4 i 5 jest lepszy od klasycznego portfela Markowitza (portfel 3).

W celu porównania wartości przyszłych skonstruowanych portfeli wyznaczone zostały stopy zysku każdego z nich na koniec kolejnych trzech miesięcy; okresem bazowym, z którym porównywano wartości portfeli był 01.10.2012 – pierwszy dzień notowań po okresie uwzględnionym w badaniach. Rozważano portfele, których strukturę uzyskano na podstawie analiz w podejściu klasycznym i fundamentalnym oraz portfel Markowitza.

Tabela 11

Stopy zysku portfeli na koniec kolejnych trzech miesięcy

Stopa zysku portfela (%) w dniu	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 4	Portfel 5
31.10.2012	-3,93	-7,15	-11,44	8,43	3,80
30.11.2012	1,11	-6,94	-7,09	14,73	10,43
28.12.2012	7,52	4,14	-0,42	18,03	14,43

Zauważalna jest pewna prawidłowość: w przypadku każdego z portfeli pod koniec października obserwowane są najmniejsze zyski bądź największe straty, natomiast pod koniec grudnia są największe zyski lub najmniejsze straty. Każdy z portfeli reaguje zatem na zmiany na rynku podobnie. Istotną obserwacją jest również fakt, że konstruując portfel, którego struktura oparta jest na procedurze wielokryterialnej, uzyskuje się istotnie lepsze rezultaty niż dla klasycznego portfela Markowitza. Ponadto, portfele skonstruowane na podstawie analizy fundamentalnej na końcu każdego z rozpatrywanych miesięcy dają zyski (w tym przypadku największe, gdy każde z uwzględnionych kryteriów traktowane jest jako tak samo ważne), natomiast portfel 1, który w kategorii klasycznych był najlepszy, daje niewielką stratę na końcu października, ale na koniec grudnia ponad 7,5% zysk – w analizach wielokryterialnych dla tego portfela waga nadana kryterium stopy zwrotu R była największa, suma wag przyporządkowanych kryteriom związanym z ryzykiem (s i β) nie przekraczała wagi dla stopy zwrotu, a dla czwartego kryterium – skośności, waga była najniższa, lecz różna od zera (przy innych zestawieniach wag, dla których zachowana była powyższa zasada, portfel był identyczny). Należy zatem podkreślić, iż zastosowane wielokryterial-

ne podejście fundamentalne daje lepsze rezultaty niż podejście klasyczne, co potwierdza, że rozważania mające na celu tworzenie portfeli powinny być także oparte na analizie fundamentalnej, a zatem na analizie wskaźników określających kondycję ekonomiczno-finansową spółek giełdowych.

Podsumowanie

Podmiot, który ma dokonać wyboru wariantu decyzyjnego lub kilku najlepszych wariantów często musi spojrzeć na swój wybór przez pryzmat wielu kryteriów. Zasadne jest wspomaganie się w tym procesie narzędziami, które pozwalają na metodyczne podejście do zagadnienia. Inwestor zainteresowany ulokowaniem kapitału w akcje staje przed problemem wyboru tych walorów, które cechuje względnie wysoka stopa zwrotu, a zarazem niewielkie ryzyko; może również być zainteresowany tymi spółkami, które będą spełniały inne określone kryteria (ocena ważności wybranych kryteriów należy do decydenta i wpływa na otrzymane wyniki). Dlatego też do porządkowania i wyboru najlepszych, z punktu widzenia decydenta, spółek można podejść jak do decyzji wielokryterialnej. W rozważaniach wykorzystana została koncepcja zastosowania wielokryterialnej metody AHP, w której jako kryteria brane są pod uwagę miary klasyczne oraz wskaźniki ekonomiczno-finansowe charakteryzujące spółki.

Przeprowadzone badania pokazują, iż portfele wyznaczone na podstawie rankingów uzyskanych za pomocą procedury wielokryterialnej charakteryzują się wysoką stopą zysku (pomiędzy 19,5% a 34,58%); zyski te są wyższe niż w przypadku klasycznego portfela Markowitza. Ponadto, analiza wartości portfeli (skonstruowanych na podstawie metody wielokryterialnej) w kolejnych trzech miesiącach, potwierdza zdecydowanie lepsze rezultaty w porównaniu do portfela Markowitza.

Zaprezentowane podejście, zwłaszcza w ujęciu fundamentalnym, umożliwia wyznaczenie portfeli o wysokiej stopie zysku, zależnej od preferencji decydenta. Można zatem wnioskować, iż przedstawione zastosowanie metody wielokryterialnej może być alternatywnym podejściem mającym na celu ocenę spółek giełdowych oraz wyznaczanie portfela.

Literatura

- Jajuga K., Jajuga T.: Inwestycje. PWN, Warszawa 2006.
- Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym. Red. T. Trzaskalik. PWE, Warszawa 2006.
- Pośpiech E.: Zastosowanie metody AHP do tworzenia portfela papierów wartościowych. Materiały Konferencji „Metody 2012”. UE, Katowice 2013 (w recenzji).
- Saaty T.L.: Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. „Management Science” 1986, Vol. 32, No. 7.
- Saaty T.L.: Fundamentals of Decisions Making and Priority and Theory with the Analytical Hierarchy Process. RWS Publications, Pittsburgh 1994.
- Steuer R.E., Qi Y., Hirschberger M.: Portfolio Selection in the Presence of Multiple Criteria. W: Handbook of Financial Engineering. Ed. C. Zopounidis, M. Doumpos, P.M. Pardalos. Springer Science, New York 2008.
- Tarczyński W.: Fundamentalny portfel papierów wartościowych. PWE, Warszawa 2002.
- Zopounidis C., Doumpos M.: Multi-criteria Decision Aid in Financial Decision Making: Methodologies and Literature Review. „Journal of Multi-Criteria Decision Analysis” 2002, No. 11.
- <http://www.gpw.pl>
- <http://www.bankier.pl>

THE AHP METHOD FOR PORTFOLIO SELECTION AND ESTIMATION – CLASSICAL AND FUNDAMENTAL APPROACH

Summary

The article presents practical applications of chosen multiple criteria decision making method – AHP (Analytic Hierarchy Process). The main purpose is to build portfolios on the basis of this method.

It is important to make the best decision when there are many alternatives (objects) that are evaluating under differing criteria. AHP is one of multiple criteria decision making methods; it enables to compare considered objects for each criterion and creates a ranking of all the objects. Building a portfolio is a problem of selecting these objects (quoted companies) that have, for example, high return rate and low variance, but also other features, like low β coefficient or high skewness coefficient. To built a portfolio according to the classical approach of using AHP method, all mentioned measures can be considered as criteria. In the other approach – fundamental one, some diagnostic features that characterize financial and economic condition of companies can be used as criteria. Created multiple criteria rankings can help to choose the best listed companies to the portfolio.

In the paper, portfolios built on the basis of AHP rankings were estimated. To compare the profit rate of created this way portfolios, a classical portfolio based on Markowitz approach also was appointed. The profit rate of each portfolio designed on the basis of AHP method was over 19,5% and was higher than the profit rate of classical Markowitz one. Besides, the portfolios profit rates estimated for next three months were also better than Markowitz portfolio profit rate what confirms that using proposed approach may bring in interesting results.

Marcin Salamaga

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

OCENA EFEKTYWNOŚCI WYBRANYCH STRATEGII INWESTOWANIA CYKLICZNEGO NA POLSKIM RYNKU KAPITAŁOWYM W ŚWIETLE MIERNIKÓW OPARTYCH NA MODELU CAPM

Wprowadzenie

Od co najmniej kilkunastu lat w badaniach rynków finansowych coraz bardziej widoczny jest nurt dotyczący analizy efektywności tych rynków. W ramach tego nurtu próbuje się ocenić poziom dojrzałości rynków kapitałowych oraz wskazać ewentualne prawidłowości w ich ewolucyjnych przemianach. Pod pojęciem efektywności rynku w sensie informacyjnym rozumie się na ogół taką właściwość rynku, która pozwala na natychmiastowe odzwierciedlenie wszystkich dostępnych informacji rynkowych w cenie instrumentów finansowych (np. akcji). Efektywność rynku w tzw. słabym sensie oznacza, że ceny dyskontują zasób informacji bieżących, jak i historycznych o rynku i jego instrumentach finansowych¹. Potwierdzenie hipotezy o słabej efektywności informacyjnej rynku oznacza m.in., że na podstawie historycznych informacji rynkowych nie da się skutecznie wykorzystywać np. narzędzi analizy technicznej do osiągnięcia ponadprzeciętnych zysków, nie da się „wygrać” z rynkiem. Weryfikację efektywności informacyjnej rynków finansowych przeprowadzono w wielu pracach empirycznych wykorzystując różne metody badawcze, w tym narzędzia statystyczne i ekonometryczne². Niniejszy artykuł, częściowo zainspirowany tymi pracami,

¹ K. Jajuga, T. Jajuga: Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008, s. 148.

² D. Witkowska, K. Kompa, M. Grabska: Badanie informacyjnej efektywności rynku w formie silnej na przykładzie wybranych funduszy inwestycyjnych. W: Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych X. Red. D. Witkowska. Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2009, s. 265; R. Hudson, M. Dempsey, K. Keasey: A Note on the Weak form Efficiency of Capital Markets:

do pewnego stopnia stanowi próbę weryfikacji słabej efektywności informacyjnej polskiego rynku kapitałowego. Cel ten postanowiono osiągnąć poprzez badanie efektywności wybranych strategii inwestycyjnych stosowanych w analizie technicznej. Porównywane strategie poddano kompleksowej ocenie za pomocą miar jakości zarządzania portfelem inwestycyjnym uwzględniających koncepcję wyceny aktywów kapitałowych (CAPM – Capital Asset Pricing Model), jak wskaźniki Sharpe’a, Treynora, Jensena czy alfa Sharpe’a oraz za pomocą modeli stosowanych do testowania tzw. wyczucia rynku. W badaniu uwzględniono dane dotyczące trzech indeksów giełdowych: WIG20, mWIG40 i sWIG80 według cen zamknięcia sesji giełdowych z okresu 31.12.1997-22.03.2013³.

1. Metodologia oceny efektywności strategii inwestycyjnych

Zgodnie z teorią, efektywność rynku w słabym sensie implikuje brak skuteczności narzędzi analizy technicznej. W badaniach postanowiono więc przetestować pod tym kątem jeden z najpopularniejszych wskaźników stosowanych w analizie technicznej, a mianowicie prostą średnią kroczącą. Technikę średniej kroczącej wykorzystuje się m.in. do wykrywania sygnałów kupna i sprzedaży instrumentów finansowych.

Według zasad analizy technicznej sygnał kupna (sprzedaży) pojawia się wówczas, gdy średnia krótkookresowa (długookresowa) przekracza wartość średniej długookresowej (krótkookresowej). Niech więc p będzie parametrem wygładzania dla średniej ruchomej krótkookresowej („szybszej” średniej), q – parametrem wygładzania dla średniej ruchomej długookresowej („wolniejszej” średniej). Wówczas, spełnienie jednego z poniższych warunków generuje⁴

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_{t-i} > \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} x_{t-i} \quad - \text{sygnał kupna}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_{t-i} < \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} x_{t-i} \quad - \text{sygnał sprzedaży}. \quad (2)$$

cd. przypisu 2

The Application of Simple Technical Trading Rules to UK Stock Prices – 1935 to 1994. „Journal of Banking & Finance” 1996, Vol. 20, No. 6, s. 1121-1132.

³ Początek okresu badania dostosowano do momentu, w którym rozpoczął notowania „najmłodszy” z porównywanych indeksów giełdowych, czyli indeks mWIG40.

⁴ M.I. Gerov: The Predictive Power and Economic Effectiveness of Trading Rules Strategies: Application of VMA (p, q, r) and TRB (p, r, d) Conditional Models to Canadian Equity Market. Thesis in John Molson School of Business, Montreal 2005, s. 9.

W przypadku, gdy wartość średniej krótkookresowej w niewielkim zakresie odchyli się od średniej długookresowej, to powstałe sygnały kupna lub sprzedaży mogą uchodzić za słabe. W tej sytuacji korzystne wydaje się zastosowanie procedury odfiltrowania takich sygnałów. W niniejszym artykule zastosowano do tego celu tzw. band, czyli pasmo wahań wokół długookresowej średniej kroczącej⁵. Zazwyczaj granicę tego pasma wyznacza się za pomocą arbitralnie przyjętego procentu wartości średniej długookresowej (np. 1%). Sygnał kupna lub sprzedaży będzie generowany tylko wówczas, gdy wartość średniej krótkookresowej odchyli się od wartości średniej długookresowej o więcej niż ustalony procent wartości „wolniejszej” średniej. Reguły generowania sygnałów zgodnych z przedstawioną tu zasadą opisują formuły (3) i (4).

Spełnienie jednego z poniższych warunków generuje⁶

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_{t-i} > (1+b) \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} x_{t-i} \quad - \text{sygnał kupna}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} x_{t-i} < (1-b) \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} x_{t-i} \quad - \text{sygnał sprzedaży}. \quad (4)$$

gdzie:

b – ustalony procent „wolniejszej średniej”.

Przyjmijmy, że w przypadku pojawienia się słabych sygnałów kupna lub sprzedaży inwestor będzie szukał możliwości lokowania środków finansowych według stopy wolnej od ryzyka. Wówczas średnią stopę zwrotu z całkowitej inwestycji kapitałowej można obliczyć według wzoru⁷

$$\mu_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t d_{1t} + f_t d_{2t}) \quad (5)$$

gdzie:

r_t – stopa zwrotu ceny waloru (indeksu) w momencie t ,

f_t – stopa wolna od ryzyka⁸,

⁵ W. Brock, J. Lakonishok, B. LeBaron: Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns. „Journal of Finance” 1992, Vol. 47, s. 1738.

⁶ M.I. Gerov: Op. cit., s. 11.

⁷ D. Isakov, M. Hollistein: Application of Simple Technical Trading Rules to Swiss Stock Prices: Is it Profitable? „Financial Markets and Portfolio Management” 1999, Vol. 13, No. 1, s. 7.

⁸ W niniejszych badaniach jako stopę wolną od ryzyka przyjęto oprocentowanie 26-tygodniowych bonów skarbowych.

d_{1t} – zmienna o wartościach: 1 (sygnał kupna), -1 (sygnał sprzedaży) lub 0 (sygnał neutralny),

d_{2t} – zmienna o wartościach: 1 (sygnał neutralny) lub 0 (sygnał kupna lub sprzedaży).

Wzór (5) przedstawia stopę zwrotu z inwestycji mieszanej wykorzystującej zarówno wzrosty, spadki indeksów giełdowych (przy założeniu nieograniczonego stosowania tzw. krótkiej sprzedaży), jak i możliwość lokowania środków według stopy wolnej od ryzyka.

Wybrane konfiguracje parametrów długookresowej i krótkookresowej średniej kroczącej w połączeniu z opisanym tu mechanizmem inwestycyjnym potraktowano jako odrębne strategie inwestycyjne ze stopą zwrotu (5). Efektywność tych strategii zbadano za pomocą miar selektywności oraz miar wycucia rynku.

1.1. Miary selektywności

Selektywność (selectivity) to poprawa efektywności inwestycji poprzez umiejętny wybór akcji, czyli formułowanie prawidłowych mikroprognoz na podstawie informacji publicznej, jak i niedostępnej dla przeciętnego inwestora⁹. Do miar selektywności należą m.in. wskaźniki Sharpe'a (1966), Treynora (1965), Jensena (1969) i alfa Sharpe'a.

Wskaźnik Sharpe'a wyraża stosunek premii za ryzyko całkowite (dodatkowej stopy zwrotu) do poziomu tego ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym stopy zwrotu z portfela inwestycyjnego.

Wskaźnik ten można formalnie przedstawić za pomocą wzoru¹⁰

$$Sh = \frac{\bar{r} - r_F}{s} \quad (6)$$

gdzie:

$\bar{r}$ – średnia stopa zwrotu z inwestycji,

r_F – stopa wolna od ryzyka osiągnięta w analizowanym okresie,

s – odchylenie standardowe stopy zwrotu z inwestycji.

⁹ J. Czekaj, K. Jajuga, J. Socha: Rynek funduszy inwestycyjnych w Polsce. AE, Kraków 2000, s. 68.

¹⁰ K. Jajuga, T. Jajuga: Op. cit., s. 257.

Wartość współczynnika Sharpe'a informuje więc o wysokości premii za ryzyko na jednostkę podjętego ryzyka. Wyższą efektywnością odznaczają się te strategie inwestycyjne, dla których wartość współczynnika Sharpe'a jest wyższa¹¹. Aby sprawdzić, czy dana strategia inwestycyjna jest bardziej efektywna niż rynek, wystarczy porównać otrzymaną dla niej wartość wskaźnika Sharpe'a ze wskaźnikiem referencyjnym rynku obliczonym również z wzoru (6) po zastąpieniu w nim $\bar{r}$ i s odpowiednio przez średnią stopę zwrotu $\bar{r}_m$ i odchylenie standardowe s_m indeksu giełdowego. Jeśli wynik wzoru (6) dla danej strategii przewyższy wartość referencyjną wskaźnika Sharpe'a, to można twierdzić, że strategia inwestycyjna jest bardziej efektywna niż rynek.

Alfa Sharpe'a jest ulepszonym wskaźnikiem Sharpe'a uwzględniającym oczekiwania inwestorów stwarzane przez konkretne warunki rynkowe, dzięki czemu miara ta jest niewrażliwa na ogólną koniunkturę na rynku i można ją wykorzystać do porównywania stóp zwrotu uzyskanych w różnych okresach¹². Współczynnik alfa Sharpe'a można obliczyć ze wzoru¹³

$$\alpha_{Sharpe'a} = \bar{r} - \bar{r}_m \frac{s}{s_m} \quad (7)$$

gdzie:

$\bar{r}$ – średnia stopa zwrotu z inwestycji,

$\bar{r}_m$ – średnia rynkowa stopa zwrotu (obliczona np. za pomocą giełdowego indeksu)

s_m – odchylenie standardowe rynkowej stopy zwrotu,

s – odchylenie standardowe stopy zwrotu inwestycji.

Wartości współczynnika Treynora obliczamy ze wzoru¹⁴

$$T = \frac{\bar{r} - r_F}{\beta} \quad (8)$$

gdzie:

$\bar{r}$ – średnia stopa zwrotu z inwestycji,

r_F – stopa wolna od ryzyka osiągnięta w analizowanym okresie,

β – współczynnik beta dla portfela (miara ryzyka rynkowego).

¹¹ R.A. Haugen: Teoria nowoczesnego inwestowania. WIG-Press, Warszawa 1997, s. 380-382.

¹² J. Czekaj, M. Woś, J. Żarnowski: Efektywność giełdowego rynku akcji w Polsce. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001, s. 135-136.

¹³ J. Czekaj, K. Jajuga, J. Socha: Op. cit., s. 74.

¹⁴ K. Jajuga, T. Jajuga: Op. cit., s. 258.

W prowadzonych tutaj badaniach współczynnik β wyraża reakcję stopy zwrotu (5) na stopę zwrotu z indeksu giełdowego (rynkową stopę zwrotu). Ponieważ konstrukcja stopy zwrotu z inwestycji (5) uwzględnia możliwość zarabiania na spadkach giełdowych (poprzez aktywne stosowanie strategii „sprzedaj”), to w oryginalnym wzorze (8) uzasadnione jest zastosowanie bezwzględnej wartości wskaźnika β .

Strategię inwestycyjną można uważać za bardziej efektywną niż rynek, jeśli obliczona dla niej wartość wskaźnika Treynora przekracza referencyjną wartość tego wskaźnika obliczoną dla rynku. Referencyjny współczynnik Treynora można obliczyć zastępując we wzorze (8) $\bar{r}$ i β odpowiednio przez średnią stopę zwrotu z indeksu giełdowego $\bar{r}_m$ i przez poziom ryzyka systematycznego rynku β_m .

Miara Jensena powstała na bazie współczynnika Treynora z tym, że założono tutaj, iż zmiany wartości inwestycji kapitałowej należy odnieść nie tylko do statystycznych miar wrażliwości (β), lecz także do stopy zwrotu portfela rynkowego.

Współczynnik Jensena można wyrazić wzorem¹⁵

$$J = \bar{r} - r_F - (\bar{r}_m - r_F)\beta \quad (9)$$

gdzie:

$\bar{r}$ – średnia stopa zwrotu z inwestycji,

$\bar{r}_m$ – średnia rynkowa stopa zwrotu,

r_F – stopa wolna od ryzyka osiągnięta w analizowanym okresie,

β – współczynnik beta dla portfela (miara ryzyka rynkowego).

Wskaźnik Jensena informuje o skuteczności i efektywności menedżera zarządzającego inwestycją kapitałową, a także o rezultacie doboru składników do portfela inwestycyjnego¹⁶. Im wyższa jest wartość współczynnika Jensena, tym większa część zmian wartości nie jest zależna od zmian na rynku giełdowym. W obliczeniach wskaźnika (9), podobnie jak we wzorze (8), współczynnik β zastąpiono jego wartością bezwzględną z uwagi na możliwość stosowania przez inwestora krótkiej sprzedaży i zarabiania na spadkach giełdowych (poziom ryzyka inwestycji rośnie więc wraz z modulem współczynnika β).

¹⁵ Ibid., s. 258.

¹⁶ R.A. Haugen: Op. cit., s. 374.

1.2. Miary wycucia rynku

Przez wycucie rynku (market timing) należy rozumieć umiejętność przewidywania fazy wzrostowej lub spadkowej cen akcji oraz właściwe reagowanie na te zmiany rynku poprzez zapewnienie odpowiednich proporcji w portfelu inwestycyjnym pomiędzy aktywami ryzykownymi i bezpiecznymi tak, aby uzyskać wyższy poziom ryzyka portfela w okresie hossy, a niższy poziom ryzyka na rynkach spadkowych. Podobnie jak w przypadku selektywności, ocenianą umiejętnością inwestora jest formułowanie prawidłowych prognoz, z tą tylko różnicą, że chodzi tu o makroprognozy, a więc przewidywania dotyczące ruchów całego rynku na podstawie historycznych notowań rynku indeksu giełdowego

Do pomiaru wycucia rynku wykorzystuje się m.in. model Henrikssona-Mertona oparty na częstościowych ocenach prawdopodobieństw trafności prognoz dla rynków spadkowych i wzrostowych. W praktyce na ogół stosuje się parametryczną wersję tego modelu, np. w postaci¹⁷

$$R_{jt} - R_{Ft} = \alpha + \beta_1(R_{mt} - R_{Ft}) + \beta_2 Y_t + \xi_t \quad (10)$$

gdzie:

$$Y_t = \max[0; R_{Ft} - R_{mt}],$$

R_{jt} – stopa zwrotu z inwestycji,

R_{Ft} – stopa wolna od ryzyka osiągnięta w analizowanym okresie,

R_{mt} – stopa zwrotu z rynku mierzona stopą zwrotu z indeksu giełdowego,

α, β_1, β_2 – parametry strukturalne równania,

ξ_t – składnik losowy równania.

Współczynnik β_2 jest bliski zeru, jeśli inwestor nie wykazuje zdolności prognostycznych. Istotną wadą parametrycznej wersji modelu Henrikssona-Mertona jest założenie o stałości w czasie prawdopodobieństw prawidłowej prognozy, które to założenie może nie być spełnione, jeśli inwestor łatwiej przewiduje ruchy dużych rynków niż małych¹⁸.

Z kolei Treynor i Mazuy (1966) zaproponowali badanie parabolicznego zakrzywienia linii charakterystycznej portfela.

Równanie tej linii ma postać¹⁹

$$R_j = \alpha + \beta R_m + \gamma R_m^2 + \xi_j \quad (11)$$

¹⁷ J. Czekaj, K. Jajuga, J. Socha: Op. cit., s. 84.

¹⁸ Ibid., s. 93.

¹⁹ Ibid., s. 96.

gdzie:

R_j – stopa zwrotu z inwestycji,

R_m – stopa zwrotu z rynku mierzona stopą zwrotu z indeksu giełdowego,

α, β, γ – parametry strukturalne równania,

ξ_j – składnik losowy równania.

Jeśli współczynnik γ przyjmuje wartości większe od zera, to zarządzający portfelem prawidłowo prognozują ruchy rynku, przy czym wartość współczynnika γ świadczy o stopniu tej umiejętności²⁰. Twórcy modelu zalecają stosowanie go zarówno w okresach silnych wzrostów, jak i w okresach silnych spadków indeksów giełdowych, ponieważ reakcje na niewielkie ruchy rynku nie są za pomocą tego modelu obserwowalne.

2. Wyniki badań empirycznych

W niniejszym artykule badania strategii inwestycyjnych przeprowadzono dla trzech indeksów giełdowych notowanych na GPW: WIG20, mWIG40 oraz sWIG80. W tabeli 1 przedstawiono warunkowe dzienne stopy zwrotu (5) dla tych indeksów notowanych w okresie 31.12.1997-22.03.2013. Przy prezentacji wyników posłużono się następującym systemem oznaczeń dla stosowanych konfiguracji średnich kroczących: (p, q, d) , gdzie p jest parametrem wygłaszania „szybszej” średniej ruchomej (wyrażonym liczbą dni), q – parametr wygładzania wolniejszej średniej ruchomej (wyrażony w dniach), d – rozmiar pasma wahań wokół długookresowej średniej kroczącej²¹ (w %). Analizę przeprowadzono dla następujących konfiguracji parametrów: $p = 1$, $q \in \{5, 10, 30, 50, 150, 200\}$, $d = \{0, 1\}$. Wybór takich wartości parametrów p , q i d odpowiada najczęściej spotykanym długościom okresów średnich kroczących i rozmiarom pasma wahań filtrującego słabe sygnały w podobnych badaniach w literaturze przedmiotu²². Pod warunkowymi stopami zwrotu w tabeli 1 w nawiasach podano prawdopodobieństwa testowe dla wyników testu istotności t różnic warunkowej średniej stopy zwrotu (5) i oczekiwanej stopy zwrotu (szacowanej za pomocą średniej dziennej stopy zwrotu). Rezultaty statystycznie istotne na poziomie istotności 0,05 zostały wytłuszczone.

²⁰ Ibid., s. 95-96.

²¹ W. Brock, J. Lakonishok, B. LeBaron: Op. cit., s. 1738.

²² D. Isakov, M. Hollistein: Op. cit., s. 6, 9.

Tabela 1

Warunkowe średnie stopy zwrotu dla indeksów giełdowych
WIG20, mWIG40 i sWIG80

Średnie kroczące	Indeks giełdowy		
	WIG20	mWIG40	sWIG80
(1,5,0)	0,0003 (0,7949)	0,0015 (0,0001)	0,0023 (0,0006)
(1,10,0)	0,0003 (0,8591)	0,0013 (0,0008)	0,0020 (0,0032)
(1,30,0)	0,0005 (0,5836)	0,0012 (0,0038)	0,0017 (0,0001)
(1,50,0)	0,0004 (0,7472)	0,0012 (0,0042)	0,0021 (0,0027)
(1,100,0)	0,0006 (0,3088)	0,0010 (0,0211)	0,0011 (0,1435)
(1,150,0)	0,0002 (0,9707)	0,0009 (0,0731)	0,0010 (0,2100)
(1,200,0)	0,0005 (0,5510)	0,0007 (0,2496)	0,0009 (0,2757)
(1,5,1)	0,0003 (0,8492)	0,0012 (0,0007)	0,0014 (0,0125)
(1,10,1)	0,0003 (0,8247)	0,0012 (0,0012)	0,0017 (0,0011)
(1,30,1)	0,0003 (0,8720)	0,0012 (0,0025)	0,0019 (0,0000)
(1,50,1)	0,0005 (0,5741)	0,0012 (0,0032)	0,0021 (0,0046)
(1,100,1)	0,0005 (0,4472)	0,0011 (0,0158)	0,0011 (0,1383)
(1,150,1)	0,0003 (0,8204)	0,0009 (0,0539)	0,0010 (0,1863)
(1,200,1)	0,0005 (0,5486)	0,0008 (0,1502)	0,0009 (0,2901)

Z tabeli 1 wynika, że w przypadku indeksu WIG20 żaden z systemów średnich kroczących nie dostarczył średnich warunkowych stóp zwrotu istotnie wyższych od oczekiwanej stopy zwrotu. Inwestycje w indeksy mWIG40 i sWIG80 miały stopy zwrotu istotnie wyższe od odpowiednich oczekiwanych stóp zwrotu przy stosowaniu systemów średnich kroczących z pięciodniową, dziesięciodniową, trzydziestodniową, pięćdziesięciodniową oraz studniową długookresową średnią kroczącą (zarówno przy stosowaniu filtracji słabych sygnałów kupna i sprzedaży, jak i przy braku takiej filtracji). Dodatkowo inwestowanie w indeks mWIG40 pozwoliło osiągnąć warunkową stopę zwrotu istotnie przekraczającą

bezwarunkową stopę zwrotu także w przypadku systemów średnich krocących (1,150,0) oraz (1,150,1). Z tabeli 1 wynika także, że najbardziej zyskowne było inwestowanie w spółki małe, a w dalszej kolejności w spółki średnie, natomiast inwestycje w sektor spółek dużych były najmniej dochodowe. Najwyższą przeciętną stopę zwrotu zapewniała inwestycja w indeks sWIG80 zgodnie z systemem średnich ruchomych (1,5,0). Inwestując zgodnie z taką strategią inwestor mógł osiągnąć roczną stopę zwrotu równą ok. 78,53%. System średnich krocących (1,5,0) zapewniał również najwyższą stopę zwrotu dla inwestorów lokujących kapitał w spółki średnie (45,94% w skali roku). Inwestującym w sektor dużych spółek najwyższą stopę zwrotu równą 16,32% w skali roku zapewniał system średnich krocących (1,100,0).

Na tle zaprezentowanej analizy stóp zwrotu zostaną teraz poddane ocenie wyniki zarządzania inwestycjami kapitałowymi otrzymane za pomocą miar selektywności i wycucia rynku. Tabela 2 przedstawia wskaźniki selektywności dla wybranych strategii inwestycyjnych w indeks WIG20.

Tabela 2

Miary selektywności dla inwestycji w indeks WIG20
przy różnych systemach średnich krocących

Średnie krocące	Współczynnik Sharpe'a	Współczynnik Treynora	Alfa Sharpe'a	Współczynnik Jensena
(1,5,0)	0,0081	0,0168	0,0001	0,0001
(1,10,0)	0,0062	0,0069	0,0001	0,0001
(1,30,0)	0,0149	0,0304	0,0002	0,0002
(1,50,0)	0,0096	0,0819	0,0001	0,0002
(1,100,0)	0,0260	0,0267	0,0004	0,0004
(1,150,0)	0,0011	0,0015	0,0000	0,0000
(1,200,0)	0,0161	0,0241	0,0002	0,0003
(1,5,1)	0,0077	0,0090	0,0001	0,0001
(1,10,1)	0,0079	0,0085	0,0001	0,0001
(1,30,1)	0,0064	0,0067	0,0001	0,0001
(1,50,1)	0,0157	0,0771	0,0002	0,0002
(1,100,1)	0,0202	0,0197	0,0003	0,0003
(1,150,1)	0,0075	0,0224	0,0001	0,0001
(1,200,1)	0,0163	0,0248	0,0002	0,0003

Z tabeli 2 wynika, że najkorzystniejsza relacja premii za ryzyko inwestycyjne w sektorze dużych spółek do poziomu tego ryzyka wyrażonego odchyleniem standardowym warunkowych stóp zwrotu wystąpiła przy stosowaniu sys-

temu średnich kroczących (1,100,0). Także wartości wskaźnika Jensena i alfa Sharpe'a wskazują na wybór tej strategii inwestycyjnej jako optymalnej z punktu widzenia inwestora skutecznie i efektywnie zarządzającego inwestycją kapitałową na rynku dużych spółek. Jeżeli punktem odniesienia premii za ryzyko inwestycyjne będzie poziom ryzyka mierzony współczynnikiem beta portfela, to najkorzystniejszą strategią inwestycyjną będzie lokowanie środków zgodnie z systemem średnich kroczących (1,50,0). Z kolei w sensie trzech współczynników: Sharpe'a, Jensena i alfa Sharpe'a najmniej efektywną strategią inwestycyjną jest inwestycja cykliczna zgodna z systemem średnich kroczących (1,150,0). Porównując obliczone wartości wskaźnika Sharpe'a z odpowiednim wskaźnikiem referencyjnym Sharpe'a (wyznaczonym dla rynku dużych spółek) można stwierdzić, że inwestor stosując dowolną strategię zawsze „wygrywa z rynkiem”. Natomiast zestawiając odpowiednie wartości wskaźnika Treynora z wartościami referencyjnymi tego wskaźnika, otrzymujemy wniosek odmienny od poprzedniego: w każdym przypadku oceniana strategia była mniej efektywna niż rynek spółek dużych.

W tabeli 3 przedstawiono wskaźniki selektywności dla inwestycji w indeks średnich spółek.

Tabela 3

Miary selektywności dla inwestycji w indeks mWIG40
przy różnych systemach średnich kroczących

Średnie kroczące	Współczynnik Sharpe'a	Współczynnik Treynora	Alfa Sharpe'a	Współczynnik Jensena
(1,5,0)	0,1103	0,2092	0,0011	0,0013
(1,10,0)	0,0946	0,0371	0,0009	(0,0011
(1,30,0)	0,0839	0,0263	0,0008	0,0010
(1,50,0)	0,0832	0,0232	0,0008	0,0010
(1,100,0)	0,0699	0,0254	0,0006	0,0008
(1,150,0)	0,0577	0,0201	0,0005	0,0007
(1,200,0)	0,0426	0,0193	0,0003	0,0005
(1,5,1)	0,1138	0,0421	0,0009	0,0010
(1,10,1)	0,1004	0,0333	0,0009	0,0010
(1,30,1)	0,0905	0,0243	0,0008	0,0010
(1,50,1)	0,0876	0,0266	0,0008	0,0010
(1,100,1)	0,0735	0,0267	0,0007	0,0008
(1,150,1)	0,0619	0,0224	0,0005	0,0007
(1,200,1)	0,0502	0,0233	0,0004	0,0006

Z tabeli 3 wynika, że najbardziej efektywną strategią inwestowania w spółki średnie w sensie współczynnika Sharpe'a była inwestycja cykliczna z pięciodniową długookresową średnią kroczącą uwzględniającą filtrację słabych sygnałów kupna i sprzedaży. Z kolei stosując pozostałe wskaźniki selektywności stwierdzamy, że najefektywniejszą strategią inwestycyjną w indeks mWIG40 był system średnich kroczących z pięciodniową średnią długookresową bez stosowania filtracji słabych sygnałów kupna i sprzedaży. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że w świetle wartości wszystkich mierników stosowanie strategii inwestycyjnej (1,200,0) w sektorze średnich spółek wskazywałaby na najslabszą efektywność zarządzania kapitałem inwestycyjnym. Porównując wartości wskaźników Sharpe'a i Treynora dla poszczególnych strategii inwestycyjnych z referencyjnymi wartościami tych wskaźników obliczonymi dla rynku średnich spółek również uzyskujemy sprzeczne ze sobą wnioski: w sensie wskaźnika Sharpe'a wszystkie strategie były bardziej efektywne niż rynek, natomiast w sensie wskaźnika Treynora rynek był zawsze bardziej efektywny niż dowolna strategia inwestycyjna.

Tabela 4 przedstawia wskaźniki efektywności wybranych strategii inwestycyjnych w sektorze małych spółek.

Tabela 4

Miary selektywności dla inwestycji w indeks sWIG80
przy różnych systemach średnich kroczących

Średnie kroczące	Współczynnik Sharpe'a	Współczynnik Treynora	Alfa Sharpe'a	Współczynnik Jensena
(1,5,0)	0,0803	1,5170	0,0021	0,0021
(1,10,0)	0,0690	0,5256	0,0018	0,0018
(1,30,0)	0,0715	0,4864	0,0019	0,0019
(1,50,0)	0,0703	1,6648	0,0019	0,0018
(1,100,0)	0,0339	0,5412	0,0009	0,0009
(1,150,0)	0,0290	0,1617	0,0008	0,0008
(1,200,0)	0,0251	0,5050	0,0007	0,0007
(1,5,1)	0,1281	0,3100	0,0013	0,0011
(1,10,1)	0,1500	1,5900	0,0017	0,0015
(1,30,1)	0,0732	0,4714	0,0019	0,0019
(1,50,1)	0,0709	1,8481	0,0019	0,0018
(1,100,1)	0,0356	0,5341	0,0009	0,0009
(1,150,1)	0,0314	0,1916	0,0008	0,0008
(1,200,1)	0,0249	0,5340	0,0007	0,0007

Na podstawie zawartości tabeli 4 można stwierdzić, że wskaźnik Jensena i alfa Sharpe'a wskazują, że najbardziej efektywną strategią inwestowania cyklicznego w sektorze małych spółek jest inwestowanie zgodne z systemem średnich kroczących z pięciodniową średnią ruchomą bez stosowania filtracji słabych sygnałów kupna i sprzedaży. Stosując z kolei kryterium optymalnej relacji premii za ryzyko do poziomu tego ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym warunkowej stopy zwrotu, należałoby wybrać strategię inwestycyjną zgodną z systemem średnich ruchomych (1,10,1). W sensie współczynnika Treynora najbardziej efektywną strategią inwestycyjną jest strategia (1,50,1). Najmniej efektywną strategią inwestycyjną w zakresie małych spółek według wskaźników Sharpe'a, Jensena i alfa Sharpe'a była strategia zgodna z systemem średnich ruchomych (1,200,1), a według wskaźnika Treynora – strategia oparta na systemie średnich ruchomych (1,150,0). W przypadku inwestycji w indeks sWIG80 zarówno wskaźnik Sharpe'a, jak i wskaźnik Treynora w zestawieniu z wartościami referencyjnymi tych mierników informują o większej efektywności dowolnej strategii w porównaniu z rynkiem małych spółek.

Strategie wykorzystujące różne systemy średnich kroczących oceniono następnie z perspektywy wyczucia rynku przez inwestorów. W tym celu posłużono się modelami Henrikssona-Mertona (10) oraz Treynora-Mazuy'ego (11). Wyniki ocen parametrów modelu Henrikssona-Mertona dla poszczególnych strategii inwestycyjnych przedstawiono w tabeli 5 (w nawiasach pod parametrami umieszczono błędy standardowe oszacowań parametrów, a rezultaty statystycznie istotne na poziomie istotności 0,05 zostały wytłuszczone). Przeprowadzone obliczenia wykazały, że współczynnik β_2 dla większości porównywanych strategii inwestycyjnych był statystycznie istotny. Z zawartości tabeli 5 wynika, że w odniesieniu do indeksu WIG20 stosowanie tylko dwóch systemów średnich kroczących, tj. (1,50,1) oraz (1,100,1) mogło świadczyć o braku wyczucia rynku. Jednak ten wniosek należy traktować z pewną ostrożnością, gdyż parametr β_2 w przypadku tych systemów średnich kroczących nie był statystycznie istotny. Wobec przedstawionych wyników inwestorzy stosujący pozostałe strategie w sektorze dużych spółek wykazali się wyczuciem rynku. Ponadto można stwierdzić, że stosowanie dowolnej z porównywanych strategii inwestycyjnych w sektorach spółek małych i średnich świadczy o wyczuciu rynku przez inwestorów. Najlepsze wyczucie rynku kapitałowego dużych spółek mieli ci inwestorzy, którzy kierowali się systemem średnich kroczących (1,5,0). Spośród inwestujących w sektor średnich spółek największym wyczuciem rynku cechowali się tacy inwestorzy, którzy stosowali strategię inwestowania cyklicznego opartą na długookresowej pięciodniowej średniej kroczącej z filtracją słabych sygnałów kupna i sprzedaży, a najmniejszym wyczuciem odznaczał ci, którzy

stosowali system średnich kroczących (1,30,0). Z kolei spośród inwestujących w sektor małych spółek najlepsze wyczucie rynku mieli inwestorzy, którzy stosowali strategię inwestycyjną opartą na średnich kroczących (1,5,0), a najmniej wyczucie rynku mieli tacy inwestorzy, którzy stosowali system średnich kroczących (1,50,0).

Tabela 5

Wyniki estymacji modelu Henrikssona-Mertona
dla wybranych systemów średnich kroczących

Średnie kroczące	Indeks giełdowy								
	WIG20			mWIG40			sWIG80		
	α	β_1	β_2	α	β_1	β_2	α	β_1	β_2
(1,5,0)	-0,0004 (0,0001)	0,0480 (0,0048)	0,0796 (0,0078)	0,0007 (0,0000)	0,0676 (0,0049)	0,1333 (0,0075)	0,0017 (0,0001)	0,0810 (0,0105)	0,0875 (0,0112)
(1,10,0)	-0,0004 (0,0002)	0,0541 (0,0119)	0,0775 (0,0196)	0,0007 (0,0001)	0,0223 (0,0122)	0,0943 (0,0093)	0,0016 (0,0002)	0,0442 (0,0262)	0,0523 (0,0279)
(1,30,0)	0,0001 (0,0012)	0,0082 (0,0113)	0,0326 (0,0206)	0,0007 (0,0001)	-0,0030 (0,0123)	0,0620 (0,0081)	0,0006 (0,0001)	0,1068 (0,0120)	0,2163 (0,0182)
(1,50,0)	0,0002 (0,0050)	0,0026 (0,0128)	0,0012 (0,0196)	0,0007 (0,0001)	0,0021 (0,0273)	0,0795 (0,0187)	0,0017 (0,0002)	0,0250 (0,0261)	0,0287 (0,0171)
(1,100,0)	0,0004 (0,0002)	-0,0129 (0,0119)	0,0068 (0,0196)	0,0004 (0,0000)	0,0208 (0,0107)	0,0958 (0,0190)	0,0004 (0,0002)	0,1134 (0,0165)	0,1231 (0,0280)
(1,150,0)	-0,0003 (0,0011)	0,0150 (0,0142)	0,0546 (0,0196)	0,0004 (0,0001)	0,0090 (0,0123)	0,0769 (0,0188)	0,0003 (0,0077)	0,1106 (0,0153)	0,1167 (0,0280)
(1,200,0)	-0,0001 (0,0031)	0,0206 (0,0207)	0,0629 (0,0098)	0,0001 (0,0018)	0,0329 (0,0123)	0,1060 (0,0173)	0,0002 (0,0082)	0,1070 (0,0251)	0,1165 (0,0279)
(1,5,1)	-0,0003 (0,0001)	0,0455 (0,0093)	0,0684 (0,0152)	0,0004 (0,0001)	0,0648 (0,0093)	0,1610 (0,0142)	0,0004 (0,0001)	0,1550 (0,0088)	0,1666 (0,0094)
(1,10,1)	-0,0002 (0,0057)	0,0427 (0,0103)	0,0578 (0,0170)	0,0006 (0,0001)	0,0208 (0,0106)	0,0929 (0,0162)	0,0011 (0,0000)	0,0959 (0,0101)	0,1066 (0,0108)
(1,30,1)	-0,0002 (0,0061)	0,0410 (0,0101)	0,0536 (0,0150)	0,0006 (0,0000)	0,0076 (0,0115)	0,0875 (0,0175)	0,0017 (0,0002)	0,0373 (0,0259)	0,0454 (0,0276)
(1,50,1)	0,0003 (0,0002)	-0,0050 (0,0114)	-0,0036 (0,0186)	0,0007 (0,0000)	0,0020 (0,0217)	0,0700 (0,0178)	0,0017 (0,0002)	0,0301 (0,0260)	0,0341 (0,0277)
(1,100,1)	0,0004 (0,0001)	-0,0212 (0,0116)	-0,0089 (0,0190)	0,0005 (0,0001)	0,0150 (0,0420)	0,0842 (0,0183)	0,0004 (0,0002)	0,1098 (0,0261)	0,1191 (0,0278)
(1,150,1)	-0,0001 (0,0042)	0,0156 (0,0156)	0,0416 (0,0190)	0,0004 (0,0001)	0,0059 (0,0130)	0,0673 (0,0167)	0,0003 (0,0002)	0,1096 (0,0262)	0,1160 (0,0182)
(1,200,1)	-0,0001 (0,0036)	0,0220 (0,0117)	0,0649 (0,0192)	0,0001 (0,0001)	0,0433 (0,0120)	0,1227 (0,0103)	0,0002 (0,0049)	0,1021 (0,0168)	0,1112 (0,0279)

W tabeli 6 przedstawiono wyniki estymacji parametrów modelu Treynora-Mazuy'ego (11) wraz z błędami standardowymi ocen parametrów. Analizując jej zawartość należy stwierdzić, że parametr γ odzwierciedlający wycucie rynku (lub jego brak) był na ogół statystycznie istotny na poziomie istotności 0,05 (wyniki statystycznie istotne wytłuszczono).

Tabela 6

Wyniki estymacji modelu Treynora-Mazuy'ego
dla wybranych systemów średnich kroczących

Średnie kroczące	Indeks giełdowy								
	WIG20			mWIG40			SWIG80		
	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
(1,5,0)	0,0002 (0,0000)	0,0085 (0,0007)	0,4002 (0,0191)	0,0015 (0,0000)	-0,0044 (0,0007)	0,2476 (0,0214)	0,0023 (0,0000)	0,0057 (0,0015)	0,0038 (0,0012)
(1,10,0)	0,0002 (0,0000)	0,0156 (0,0006)	0,4762 (0,0173)	0,0014 (0,0000)	-0,0324 (0,0006)	-0,3375 (0,0208)	0,0020 (0,0000)	-0,0177 (0,0009)	-0,0127 (0,0007)
(1,30,0)	0,0004 (0,0001)	-0,0081 (0,0033)	0,0770 (0,0954)	0,0013 (0,0000)	-0,0416 (0,0034)	-0,5598 (0,1072)	0,0014 (0,0000)	0,0001 (0,0034)	1,8575 (0,1072)
(1,50,0)	0,0004 (0,0000)	0,0017 (0,0041)	-0,2387 (0,0935)	0,0012 (0,0000)	-0,0429 (0,0011)	-0,1126 (0,0064)	0,0021 (0,0001)	-0,0066 (0,0074)	-0,0049 (0,0009)
(1,100,0)	0,0007 (0,0001)	-0,0164 (0,0002)	-0,1406 (0,0954)	0,0010 (0,0000)	-0,0313 (0,0014)	0,1532 (0,0073)	0,0011 (0,0000)	0,0108 (0,0076)	0,0081 (0,0004)
(1,150,0)	0,0002 (0,0000)	-0,0124 (0,0026)	0,2525 (0,0855)	0,0009 (0,0000)	-0,0333 (0,0027)	0,0770 (0,1074)	0,0010 (0,0000)	0,0256 (0,0061)	0,0186 (0,0059)
(1,200,0)	0,0004 (0,0001)	-0,0108 (0,0023)	0,4054 (0,0954)	0,0006 (0,0000)	-0,0218 (0,0022)	0,5883 (0,1076)	0,0009 (0,0001)	0,0094 (0,0075)	0,0071 (0,0009)
(1,5,1)	0,0002 (0,0000)	0,0117 (0,0026)	0,4829 (0,0745)	0,0012 (0,0000)	-0,0213 (0,0026)	0,3913 (0,0813)	0,0013 (0,0000)	0,0205 (0,0025)	0,0149 (0,0020)
(1,10,1)	0,0002 (0,0001)	0,0139 (0,0029)	0,3258 (0,0829)	0,0013 (0,0000)	-0,0328 (0,0029)	-0,2911 (0,0929)	0,0017 (0,0000)	-0,0042 (0,0029)	-0,0029 (0,0003)
(1,30,1)	0,0002 (0,0001)	0,0143 (0,0018)	0,3034 (0,0828)	0,0013 (0,0000)	-0,0427 (0,0031)	-0,2447 (0,1002)	0,0021 (0,0001)	-0,0209 (0,0074)	-0,0150 (0,0059)
(1,50,1)	0,0005 (0,0001)	-0,0034 (0,0032)	-0,1995 (0,0910)	0,0013 (0,0000)	-0,0394 (0,0032)	-0,3472 (0,1021)	0,0021 (0,0001)	-0,0060 (0,0078)	-0,0045 (0,0060)
(1,100,1)	0,0006 (0,0000)	-0,0169 (0,0024)	-0,2664 (0,0929)	0,0011 (0,0000)	-0,0314 (0,0025)	0,0479 (0,1092)	0,0011 (0,0000)	0,0111 (0,0084)	0,0083 (0,0059)
(1,150,1)	0,0003 (0,0001)	-0,0053 (0,00724)	0,1515 (0,0925)	0,0009 (0,0000)	-0,0315 (0,0017)	0,0394 (0,1151)	0,0010 (0,0000)	0,0234 (0,0067)	0,0169 (0,0059)
(1,200,1)	0,0004 (0,0000)	-0,0104 (0,0018)	0,4208 (0,0937)	0,0007 (0,0000)	-0,0196 (0,0030)	0,7353 (0,1047)	0,0009 (0,0001)	0,0088 (0,0075)	0,0067 (0,0009)

Z rezultatów zamieszczonych w tabeli 6 wynika, że inwestorzy w przypadku większości stosowanych strategii inwestycyjnych na rynkach spółek dużych, średnich i małych mieli właściwe wyczucie rynku (dodatnie wartości ocen parametru γ). Niżej opisano te strategie, które wskazują na brak wyczucia rynku. Niezależnie od rozpatrywanego indeksu giełdowego, stosowanie strategii inwestycyjnych opartych na systemach średnich kroczących (1,50,0) oraz (1,50,1) może świadczyć o braku wyczucia rynku przez inwestorów (ujemne wartości parametru γ). Ponadto o braku wyczucia rynku można mówić w przypadku inwestujących w sektor spółek średnich lub małych, którzy stosują systemy średnich kroczących z dziesięciodniową i trzydziestodniową „wolniejszą” średnią kroczącą (niezależnie od filtrowania słabych sygnałów kupna i sprzedaży). Brak wyczucia rynku był również charakterystyczny m.in. dla inwestujących w sektor dużych spółek według systemów średnich kroczących (1,100,0), (1,100,1), przy czym w obu przypadkach parametr γ nie był statystycznie istotny, więc ten wniosek należy traktować z pewną dozą ostrożności.

Podsumowanie

Na podstawie przedstawionych wyników można stwierdzić, iż niezależnie od stosowanej strategii inwestycyjnej najbardziej zyskownym w rozpatrywanym czasie był sektor małych spółek, natomiast najmniej opłacalne okazały się inwestycje w duże spółki. Wniosek ten pozostaje prawdziwy w sytuacji stosowania filtracji słabych sygnałów kupna i sprzedaży, jak i przy braku takiej selekcji sygnałów. Z kolei wyniki miar oceniających selektywność są zależne od rodzaju indeksu giełdowego oraz ocenianych strategii inwestycyjnych. Otrzymane rezultaty pokazują, że ocena efektywności jednej i tej samej strategii może być różna w zależności od stosowanych mierników. Jest to spowodowane faktem, że wykorzystane metody oceny efektywności strategii inwestycyjnych są skonstruowane w oparciu o różne kryteria. Najbardziej zgodne oceny wyników zarządzania inwestycjami dawały wskaźnik Jensena i alfa Sharpe’a. Generalnie w świetle wskaźników selektywności w sektorze małych i średnich spółek najwyżej oceniane są strategie inwestowania cyklicznego, w których okres „wolniejszej” średniej kroczącej jest najwyżej kilkudniowy, natomiast w sektorze dużych spółek najbardziej efektywne okazały się strategie, w których średnia „wolniejsza” miała długie, np. kilkusetdniowe okresy.

Dla kompleksowej analizy efektywności strategii inwestycyjnych, wyniki wskaźników selektywności rynku wzbogacono o ocenę wyczucia rynku za pomocą modeli Henrikssona-Mertona oraz Treynora-Mazuy'ego. Wyniki modelu Henrikssona-Mertona pokazały, że inwestorzy niezależnie od stosowanej strategii inwestycyjnej, inwestując zwłaszcza w sektory małych i średnich spółek, cechowali się na ogół właściwym wyczuciem rynku.

Model Treynora-Mazuy'ego okazał się bardziej „konserwatywny”. W świetle jego wyników strategię inwestycyjną świadczącą o braku wyczucia rynku zdarzają się inwestorom lokującym kapitał w każdym z trzech sektorów spółek, przy czym najczęściej takie strategię występowały w sektorze średnich spółek, a najrzadziej w sektorze spółek dużych. Reasumując należy podkreślić, że otrzymane wyniki tylko częściowo potwierdzają przypuszczenie o wypracowaniu ponadprzeciętnych stóp zwrotu przez inwestorów stosujących różne strategię inwestowania cyklicznego. Zatem hipoteza o efektywności polskiego rynku kapitałowego nie znalazła pełnego potwierdzenia. Badania pokazały, że stosując wybrane narzędzia analizy technicznej można bowiem osiągnąć ponadprzeciętne zyski i większą efektywność inwestycji w porównaniu z rynkiem. Do tej konkluzji należy podchodzić jednak z ostrożnością, bo przedstawione tutaj rezultaty pomijają jeden dość istotny aspekt inwestowania cyklicznego, a mianowicie koszty transakcji. Te w warunkach polskiego rynku kapitałowego szczególnie dla indywidualnych inwestorów mogą być znaczące, przez co powodują obniżenie faktycznej efektywności inwestycji. Wydaje się, że przedstawione wyniki pokazują celowość dalszych badań nad efektywnością strategii inwestycyjnych m.in. z uwzględnieniem aspektu kosztów transakcji.

Literatura

- Brock W., Lakonishok J., LeBaron B.: Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns. „Journal of Finance” 1992, Vol. 47.
- Czekaj J., Jajuga K., Socha J.: Rynek funduszy inwestycyjnych w Polsce. AE, Kraków 2000.
- Czekaj J., Woś M., Żarnowski J.: Efektywność giełdowego rynku akcji w Polsce. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
- Gerov M.I.: The Predictive Power and Economic Effectiveness of Trading Rules Strategies: Application of VMA (p, q, r) and TRB (p, r, d) Conditional Models to Canadian Equity Market. Thesis in John Molson School of Business, Montreal 2005.
- Haugen R.A.: Teoria nowoczesnego inwestowania. WIG-Press, Warszawa 1997.

- Hudson R., Dempsey M., Keasey K.: A Note on the Weak form Efficiency of Capital Markets: The Application of Simple Technical Trading Rules to UK Stock Prices – 1935 to 1994. „Journal of Banking & Finance” 1996, Vol. 20, No. 6.
- Isakov D., Hollistein M.: Application of Simple Technical Trading Rules to Swiss Stock Prices: Is it Profitable? „Financial Markets and Portfolio Management” 1999, Vol. 13, No. 1.
- Jajuga K., Jajuga T.: Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- Witkowska D., Kompa K., Grabska M.: Badanie informacyjnej efektywności rynku w formie silnej na przykładzie wybranych funduszy inwestycyjnych. W: Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych X. Red. D. Witkowska. Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2009.

EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF SELECTED TECHNICAL TRADING RULES ON THE POLISH STOCK MARKET USING THE MEASURES CREATED ON THE BASE OF CAPM

Summary

The aim of the paper is to evaluate the effectiveness of selected investment strategies applied to the Polish stock market. In the research there were taken into consideration strategies formulated in accordance with the technical trading rules, the essence of which is to determine the moments of the generation of buy or sell signals of the financial instruments. In the paper different systems of moving averages were calculated for the selected indexes on the Warsaw Stock Exchange. To evaluate the effectiveness of comparable investment strategies, there are applied common measures of portfolio management quality created on the base of the Capital Asset Pricing Model, as the Sharpe ratio, Treynor ratio, Jensen's index, Sharpe alpha and measures of market timing.

OPTYMALNE DECYZJE

Katarzyna Jakowska-Suwalska

Adam Sojda

Politechnika Śląska w Gliwicach

ZASTOSOWANIE ALGORYTMU VEGA DO WYZNACZANIA POZIOMU ZAMÓWIEŃ NA MATERIAŁY W PRZEDSIĘBIORSTWIE GÓRNICZYM*

Wprowadzenie

Działalność wydobywcza w kopalni węgla kamiennego związana jest z prowadzeniem prac w warunkach charakteryzujących się zmiennością losową. Struktura geologiczna górotworu nie jest do końca zbadana, zatem nie jest możliwe dokładne określenie zapotrzebowania na materiały. Zmiany w strukturze geologicznej mogą powodować zmiany o charakterze ilościowym, konieczność zwiększenia zapotrzebowania na dany materiał, np. zmniejszenie odstępów pomiędzy poszczególnymi odrzwiami obudowy do zabudowy chodnika, ale może również wymusić zmianę typu obudowy na mocniejszą. Przeprowadzane badania potwierdzają losowy charakter zużycia materiałów w kopalni węgla kamiennego. Planowanie zapotrzebowania materiałowego powinno z jednej strony uwzględniać ten specyficzny aspekt działalności przedsiębiorstwa, z drugiej racjonalna i ekonomicznie uzasadniona działalność gospodarcza powinna minimalizować koszty zakupu materiałów.

* Praca powstała w ramach realizacji projektu badawczego nr N N524 552038 „Wielokryterialne wspomaganie planowania i kontrolowania potrzeb materiałowych w przedsiębiorstwie górniczym” finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

1. Postać modelu

W długoterminowym planowaniu wielkości zapotrzebowania na materiały w kopalni uwzględnia się plany wydobywania i związane z nim planowane metry robót przygotowawczych, planowane liczby zbrojonych i likwidowanych ścian. Każdy materiał związany jest z odpowiednim typem produkcji (wydobycie, zbrojenie, likwidacja ścian, roboty przygotowawcze), dla której jest on przeznaczony. Jako jednostkę produkcji przyjęto jednostki odpowiednie dla typów produkcji i tak: dla wydobywania – tony, dla robót przygotowawczych – metry bieżące, dla zbrojenia i likwidacji ścian ich liczbę lub długość w metrach.

Oznaczono przez Z_i wielkość zapotrzebowania na materiał M_i , natomiast przez z_i wielkość zapotrzebowania na ten materiał na jednostkę produkcji ($i = 1, 2, \dots, r$). W pracy założono, że tendencje zużycia z_i materiału M_i wyznaczone na podstawie historycznych wielkości x_{it} ($t = 1, 2, \dots, n$) nie ulegną zmianie w planowanym okresie. W ogólnym modelu ustalania wielkości zapotrzebowania za kryteria oceniające przyjęto:

(a) wielkość odchylenia zapotrzebowania z_i od historycznych wielkości zużycia materiałów x_{it} ($t = 1, 2, \dots, n$),

(b) koszty zakupu wszystkich analizowanych materiałów.

Zagadnienie można zapisać w postaci

$$\left\{ \begin{array}{ll} |x_{it} - z_i| \rightarrow \min, & (a) \\ \sum_{i=1}^r c_i z_i W_i \rightarrow \min & (b) \\ \sum_{i=1}^r c_i z_i W_i \leq K \\ z_i^{\text{dolne}} \leq z_i \leq z_i^{\text{górne}} \\ z_i W_i \in S_i \\ i = 1, 2, \dots, r \\ t = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (1)$$

gdzie:

c_i – cena jednostki materiału M_i ,

K – kwota przeznaczona na zakup materiałów,

W_i – planowana wielkość produkcji, na którą przeznaczony jest materiał M_i ,

z_i – wielkość zapotrzebowania na materiał M_i na jednostkę produkcji,

S_i – zbiór wyznaczony na podstawie dodatkowych warunków, dla zmiennej z_i (np. S_i to zbiór liczb naturalnych, jeśli wielkość zapotrzebowania $Z_i = W_i z_i$ na materiał M_i wyrażona w jednostkach naturalnych ma być liczbą całkowitą),

$$z_i^{dolne} \leq \min(x_{it}; t = 1, 2, \dots, n), i = 1, 2, \dots, r,$$

$$z_i^{gorne} \geq \max(x_{it}; t = 1, 2, \dots, n), i = 1, 2, \dots, r.$$

Wartości z_i^{dolne} , z_i^{gorne} mogą być również wyznaczone przez decydenta na podstawie doświadczenia bądź dodatkowych informacji o zapotrzebowaniu.

Zagadnienie (1) jest zagadnieniem programowania nieliniowego (nieliniowa grupa $r \cdot n$ funkcji celów (a)) z liniowymi ograniczeniami.

Niech wielkości $w_t > 0$ będą wagami nadanymi historycznym wielkościom zużycia x_{it} ($t = 1, 2, \dots, n$) materiałów M_i .

Można wprowadzić wagi postarzające informacje tak, aby wielkości zużycia najbliższe planowanemu okresowi miały największą wartość dla decydenta. W pracy przyjęto wagi liniowe, które wyznacza się ze wzoru

$$w_t = \frac{2t}{n(n+1)} \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Zagadnienie przyjmie wtedy postać

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^n w_t |x_{it} - z_i| \rightarrow \min \quad (a) \\ \sum_{i=1}^r c_i z_i W_i \rightarrow \min \quad (b) \\ \sum_{i=1}^r c_i z_i W_i \leq K \\ z_i^{dolne} \leq z_i \leq z_i^{gorne} \\ z_i W_i \in S_i \\ i = 1, 2, \dots, r. \end{array} \right. \quad (3)$$

Będzie to zagadnienie z r nieliniowymi funkcjami celu (a), liniową funkcją celu (b) i liniowymi ograniczeniami.

W wypadku, gdy decydent potrafi nadać poszczególnym materiałom M_i wagi $u_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) uwzględniające ich ważność w procesie produkcyjnym, można wprowadzić dla grupy r funkcji celów (a) funkcję skalaryzującą¹, np. ważoną sumę funkcji celu.

Aby można było przeprowadzić taką skalaryzację, należy sprowadzić wszystkie funkcje celu z grupy (a) do jednakowej skali. W związku z tym zaproponowano unitaryzację² na podstawie wzorów

$$z_i^u = \frac{z_i - z_i^{\text{dolne}}}{z_i^{\text{górne}} - z_i^{\text{dolne}}}, \quad x_{it}^u = \frac{x_{it} - \min(x_{it}; t=1, 2, \dots, n)}{\max(x_{it}; t=1, 2, \dots, n) - \min(x_{it}; t=1, 2, \dots, n)} \quad (4)$$

Zagadnienie można wtedy zapisać w postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^n w_t \sum_{i=1}^r u_i |x_{it}^u - z_i^u| \rightarrow \min, \quad (a) \\ \sum_{i=1}^r c_i Q_i \rightarrow \min \quad (b) \\ \sum_{i=1}^r c_i Q_i \leq K \\ 0 \leq z_i^u \leq 1 \\ Q_i \in S_i \\ i = 1, 2, \dots, r, \end{array} \right. \quad (5)$$

gdzie $Q_i = (z_i^u(z_i^{\text{górne}} - z_i^{\text{dolne}}) + z_i^{\text{dolne}})W_i$.

Do rozwiązania zagadnienia (5) zaproponowano algorytm genetyczny VEGA poszukujący rozwiązań niezdominowanych – Pareto suboptymalnych.

¹ A. Ameljańczyk: Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania. Ossolineum Wrocław 1984; E. Konarzewska-Gubała: Programowanie przy wielorakości celów. PWN, Warszawa 1980; J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Słowiński: Multiobjective Optimization – Interactive and Evolutionary Approaches Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 2008; Multiple Criteria Decision Analysis. State of the art Surveys. Red. J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott. Springer Science, 2005; W. Ogryczak: Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Uniwersytet Warszawski, Warszawa 1997; B. Roy, D. Bouyssou: Aide Multicritere a la Decision: Methodes et Cas. Economica, Paris 1993.

² K. Miettinen: Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston 1998; K. Kukuła: Metoda unitaryzacji zerowej. PWN, Warszawa 2000; J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Słowiński: Op. cit.

2. Opis algorytmu genetycznego VEGA

Algorytm genetyczny VEGA został zaprezentowany przez S.D. Schaffera w 1984 roku. Jest to jeden z najstarszych i najczęściej wykorzystywanych algorytmów do rozwiązywania zagadnień wielokryterialnych. Algorytm ten jest prosty w implementacji i zajmuje niewiele pamięci komputera. Poszukuje się w nim rozwiązań niezdominowanych – Pareto suboptymalnych³. Do uruchomienia algorytmu potrzebne są dane początkowe:

N – rozmiar populacji,

T – maksymalna liczba pokoleń (iteracji algorytmu),

P_k – prawdopodobieństwo krzyżowania,

P_m – prawdopodobieństwo mutacji,

K – liczba funkcji celu.

W etapie początkowym w dowolny sposób generuje się pierwszy zbiór N rozwiązań.

Zbiór ten dzieli się na K równoliczne podpopulacje. Selekcja rozwiązań do dalszej reprodukcji odbywa się odrębnie w każdej podpopulacji na podstawie jednej funkcji celu f_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Każdy z osobników – rozwiązań jest oceniany poprzez funkcję przystosowania. Funkcja przystosowania pozwala na ocenę rozwiązania pod względem wartości optymalizowanej funkcji bądź spełnienia dodatkowych ograniczeń⁴. Im lepsze rozwiązanie reprezentuje danych osobnik, tym większa jest wartość funkcji przystosowania. Na podstawie jej wartości wybierane są te rozwiązania – osobniki, które będą brać udział w procesie reprodukcji. Sam proces wyboru może być oparty na metodzie koła ruletki, metodzie turniejowej, metodzie stochastycznej⁵ itp. Wybrane osobniki ze wszystkich podpopulacji łączy się w jedną populację. Następnie wybrane osobniki biorą udział w procesie reprodukcji, na który składają się dwa operatory: operator krzyżowania oraz operator mutacji. Po zastosowaniu tych operatorów tworzone jest nowe pokolenie – nowy zbiór rozwiązań. Ponieważ w przyrodzie ewolucja odbywa się przez pokolenia, w implementacji zajmuje to odpowiednią liczbę iteracji, stąd procedurę tę powtarza się T razy. Po wykonaniu każdej iteracji wyszukiwane i zapamiętywane są rozwiązania Pareto suboptymalne. Po zakończeniu algorytmu VEGA rozwiązania Pareto suboptymalne z każdego po-

³ J.D. Schaffer: Some Experiments In Machine Learning Using Vector Evaluated Genetic Algorithms. PhD Dissertation. Vanderbilt University, Nashville 1984.

⁴ Z. Michalewicz: Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne. WNT, Warszawa 1996, s. 174.

⁵ D.E. Goldberg: Algorytmy genetyczne i ich zastosowania. WNT, Warszawa 1998, s. 136.

kolenia są łączone w jeden zbiór rozwiązań i znów wyszukiwane są rozwiązania niezdominowane. Po spełnieniu warunku zatrzymania otrzymane najlepsze rozwiązanie uznaje się za rozwiązanie zadania.

3. Przykład zastosowania algorytmu VEGA do wyznaczania wielkości zamówień na wybrane materiały

Do analizy wybrano:

M_1 – drewno kopalniane (używane do obudowy chodników),

M_2 – klej poliuretanowy (używany do uszczelniania wyrobisk),

M_3 – krążniki stalowe gładkie M_3 (jeden z elementów przenośników taśmowych).

Wielkości zapotrzebowania Z_i na materiały M_i wyrażone są w następujących jednostkach: Z_1 w m^3 , Z_2 w kg, Z_3 w sztukach. Ponieważ materiały M_1 , M_2 są używane w procesie robót przygotowawczych, natomiast M_3 w procesie wydobywania, wielkości zapotrzebowania z_i będą wyrażone w następujących jednostkach: z_1 w m^3 /metry robót przygotowawczych, z_2 w kg/metry robót przygotowawczych, z_3 w sztukach/tonę wydobywania. Przyjęto, że wszystkie rozważane materiały są tak samo ważne w procesie wydobywania, zatem wagi przyporządkowane materiałom M_1 , M_2 , M_3 , to $u_1 = u_2 = u_3 = 1/3$. W tabeli 1 podano planowane wielkości wydobywania, liczby metrów robót przygotowawczych, ceny jednostkowe zakupu materiałów M_1 , M_2 , M_3 oraz kwotę K przeznaczoną na zakup materiałów w planowanym okresie.

Tabela 1

Ceny jednostkowe materiałów M_1 , M_2 , M_3 , planowane roczne wydobywanie, planowana liczba metrów robót przygotowawczych, roczna kwota wydatków na zamawiane materiały

Prognostowana średnia cena kg kleju – c_1	13,75 zł
Prognostowana średnia cena za m^3 drewna – c_2	296 zł
Prognostowana średnia cena za krążnik – c_3	16,96 zł
Planowane wydobywanie – W_3	398000 t
Planowana liczba metrów robót przygotowawczych $W_1 = W_2$	14100 m
Maksymalna kwota przeznaczona na zakup materiałów – K	9 420 000 zł

Źródło: Dane kopalni.

W tabeli 2 podano podstawowe parametry wielkości zużycia materiałów M_1, M_2, M_3 na jednostkę produkcji.

Tabela 2

Podstawowe parametry rozkładów zużycia kleju, drewna i krążników na jednostkę produkcji

	Klej (kg/m)	Drewno (m ³ /m)	Krążniki (szt./t)
Średnia	52,0398	1,4810	0,0058
Mediana	37,6613	1,2940	0,0042
Odchylenie standardowe	32,7428	0,8154	0,0053
Kurtoza	-0,5595	0,0107	3,1878
Skośność	0,7601	0,7603	1,7337
Minimum	10,3400	0,3313	0,0080
Maksimum	122,9789	3,4621	0,0220
Współczynnik zmienności	0,6159	0,5389	0,9052

Źródło: Obliczenia własne na podstawie dwuletnich danych kopalni będącej oddziałem Kompanii Węglowej S.A.

Jak widać, zużycie rozważanych materiałów wykazuje dużą zmienność.

W tabeli 3 podano wartości z_i^{dolne} , $z_i^{górne}$ wyznaczone na podstawie wartości historycznych.

Tabela 3

Wartości z_i^{dolne} , $z_i^{górne}$ dla wybranych materiałów

	z_i^{dolne}	$z_i^{górne}$
Klej	10,3400	122,9789
Drewno	0,3313	3,4621
Krążniki	0,0080	0,0220

4. Budowa algorytmu

Implementacja algorytmu VEGA wymaga zdefiniowania poszczególnych jego elementów oraz określenia warunków jego działania.

Przyjęto:

$N = 100$ – rozmiar populacji,

$T = 3000$ – maksymalna liczba pokoleń (iteracji algorytmu),

$P_k = 0,5$ – prawdopodobieństwo krzyżowania,

$P_m = 0,05$ – prawdopodobieństwo mutacji,

$K = 2$ – liczba funkcji celu,

A – zbiór rozwiązań wybranych ze wszystkich pokoleń.

Każdy osobnik (rozwiązanie) reprezentowany jest przez trzejelementowy wektor liczb zmiennoprzecinkowych $\mathbf{x}_i = [z_{1i}^u, z_{2i}^u, z_{3i}^u]$, $i = 1, \dots, 100$, gdzie $z_{1i}^u, z_{2i}^u, z_{3i}^u$ to zunitaryzowane wielkości planowanego zapotrzebowania na materiały M_1, M_2, M_3 w i -tym rozwiązaniu.

Pierwsza populacja otrzymywana jest w sposób losowy. W każdym rozwiązaniu, dla każdej zmiennej z_{ji}^u ($j = 1, 2, 3$), wygenerowana zostaje liczba pseudolosowa z przedziału $(0, 1)$ i przyjęto, że jest to wartość zmiennej z_{ji}^u . Podczas losowania w wypadku, gdy wygenerowane rozwiązania nie spełniają ograniczenia kosztowego, zaproponowano heurystyczną procedurę naprawczą mającą na celu zmniejszenie wartości poszczególnych zmiennych do otrzymania rozwiązania dopuszczalnego. Dla rozwiązania niespełniającego ograniczenia kosztowego wybierana jest losowo zmienna, która będzie zmieniana (zmniejszana). Jej wartość jest pomniejszana o współczynnik skalowania, który jest przemnażany przez liczbę pseudolosową z przedziału $(0, 1)$. Procedura ta jest powtarzana do momentu uzyskania rozwiązania spełniającego ograniczenie kosztowe. Wartości poszczególnych zmiennych są zmniejszane, zatem po pewnej skończonej liczbie powtórzeń procedury można otrzymać rozwiązanie dopuszczalne, spełniające warunki kosztowe.

Ze względu na charakter optymalizacji (obie funkcje kryterium są minimalizowane) funkcje przystosowania zdefiniowano następująco

$$eval_1(\mathbf{x}) = 85 - \sum_{t=1}^{24} w_t \sum_{i=1}^3 u_i |x_{it}^u - z_{it}^u| \quad (6)$$

$$eval_2(\mathbf{x}) = 39\,000\,000 - \sum_{i=1}^r c_i Q_i \quad (7)$$

Wartości 85 i 39 000 000 wybrano jako największe możliwe wartości, które mogą być przyjęte przez funkcje kryteria (5)(a) i (5)(b). Wartość 85 jest większa od maksymalnej wartości wyznaczonej dla funkcji kryterium (5)(a). Wartość 39 000 000 jest większa od wartości 38 528 017 wyznaczonej, jako koszt zakupu maksymalnych wielkości (wyznaczonych na podstawie danych historycznych) każdego z materiałów. W ten sposób, dla każdego z wygenerowanych rozwiązań spełnione jest założenie odnośnie do oceny rozwiązania poprzez funkcje dopasowania tzn. im rozwiązanie jest lepsze tym ma przypisaną większą wartość funkcji przystosowania. Funkcja zaś nie przyjmuje wartości ujemnych.

W dalszej części algorytmu populacja jest dzielona na dwie podpopulacje, każda składa się z 50 osobników. Rozwiązania w każdej z podpopulacji są oceniane poprzez funkcje przystosowania (6) i (7) odpowiednio dla pierwszej i drugiej podpopulacji. Wyznaczane są prawdopodobieństwa

$$p_j(\mathbf{x}_{i,j}) = \frac{eval_j(\mathbf{x}_{i,j})}{\sum_{i=1}^{50} eval_j(\mathbf{x}_{i,j})}, \quad j=1, 2 \quad (9)$$

gdzie:

j – numer podpopulacji,

$\mathbf{x}_{i,j}$ – i -te rozwiązanie w podpopulacji j -tej.

Pozwalają one ustalić szansę na udział danego rozwiązania w procesie reprodukcji.

Dla każdej podpopulacji na podstawie wyznaczonych prawdopodobieństw tworzona jest empiryczna dystrybucja. Generowane są liczby pseudolosowe o rozkładzie jednostajnym z przedziału (0, 1). Porównywane są one z wartościami skumulowanych prawdopodobieństw. Pozwala to wskazać rozwiązanie, które będzie brało udział w kolejnym etapie – reprodukcji.

Po wybraniu do procesu reprodukcji 50 rozwiązań z każdej podpopulacji, łączone są one w nową populację złożoną ze 100 rozwiązań. Na elementach tej populacji stosowane są dwa operatory tworzenia nowych rozwiązań: operator krzyżowania i operator mutacji. Zastosowanie operatora krzyżowania wymaga wybrania dwóch rozwiązań. Dla każdego rozwiązania zostaje wygenerowana liczba pseudolosowa z przedziału (0, 1) w przypadku, kiedy jest ona mniejsza od założonego prawdopodobieństwa P_k (zastosowania operatora krzyżowania) rozwiązanie takie będzie mogło tworzyć nowe rozwiązanie. Ponieważ rozwiązania łączone są w pary, w przypadku wyboru nieparzystej liczby rozwiązań do zastosowania operacji krzyżowania jedno jest odrzucane.

Operator krzyżowania zdefiniowano następująco: dla każdych dwóch rozwiązań $\mathbf{x}_1 = [z_{1,1}^u, z_{1,2}^u, z_{1,3}^u]$ i $\mathbf{x}_2 = [z_{2,1}^u, z_{2,2}^u, z_{2,3}^u]$ generowana jest liczba pseudolosowa r z przedziału (0,1) i wyznaczane jest dziesięć nowych rozwiązań

$$\mathbf{y}_1 = r\mathbf{x}_1 + (1-r)\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1 + r\mathbf{x}_1 + (1-r)\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_2 + r\mathbf{x}_1 + (1-r)\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{y}_4 = (1-r)\mathbf{x}_1 + r\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{x}_1 + (1-r)\mathbf{x}_1 + r\mathbf{x}_2,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_6 &= \mathbf{x}_2 + (1-r)\mathbf{x}_1 + r\mathbf{x}_2, \\
\mathbf{y}_7 &= \mathbf{x}_1 - (r\mathbf{x}_1 + (1-r)\mathbf{x}_2), \\
\mathbf{y}_8 &= \mathbf{x}_2 - (r\mathbf{x}_1 + (1-r)\mathbf{x}_2), \\
\mathbf{y}_9 &= \mathbf{x}_1 - ((1-r)\mathbf{x}_1 + r\mathbf{x}_2), \\
\mathbf{y}_{10} &= \mathbf{x}_2 - ((1-r)\mathbf{x}_1 + r\mathbf{x}_2),
\end{aligned}$$

z których w sposób losowy wybierane są dwa.

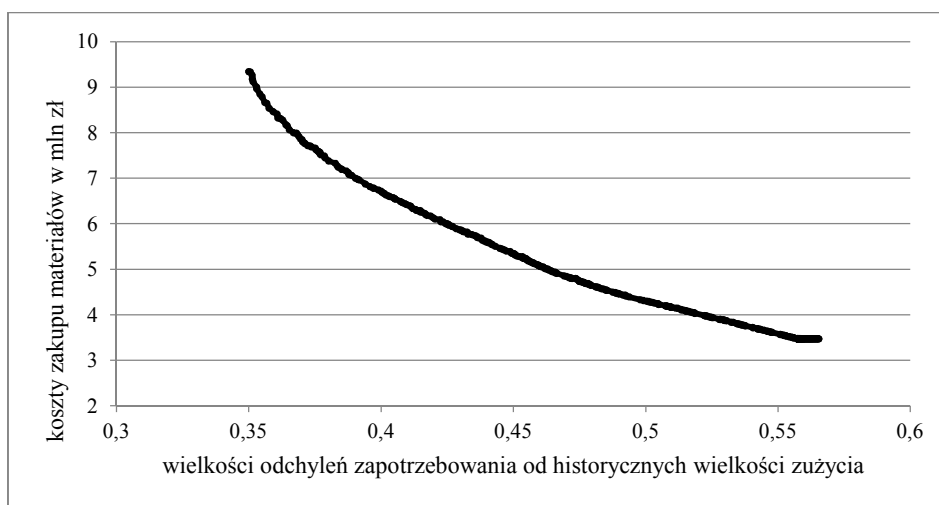
Rozszerzenie klasycznej metody krzyżowania zmiennopozycyjnego o dodatkowe rozwiązania pozwala rozwiązać problem generowania rozwiązań o wartościach z_{ji}^u pomiędzy wartościami $z_{ji_1}^u$, $z_{ji_2}^u$ rodziców.

Zastosowanie operatora mutacji polega na zmianie wartości poszczególnej zmiennej z_{ji}^u w rozwiązaniu, a nie całego rozwiązania. Dla każdej zmiennej w populacji, czyli dla 300 zmiennych, generowana jest liczba pseudolosowa z przedziału $(0, 1)$. Jeśli wartość ta jest mniejsza od wartości przyjętego prawdopodobieństwa P_m (zastosowania operatora mutacji), wartość zmiennej zastępowana jest wygenerowaną liczbą pseudolosową z przedziału $(0, 1)$.

Zastosowanie operatorów krzyżowania może doprowadzić do sytuacji, gdy otrzymane nowe rozwiązanie nie będzie spełniało warunków ograniczających. W wypadku, kiedy wartości zmiennych nie należą do przedziału $(0, 1)$, są do tego przedziału zawężane. Dla operatora mutacji nie istnieje takie niebezpieczeństwo. Dodatkowo należy pamiętać, że rozwiązanie musi spełniać ograniczenie kosztowe. W tym celu stosowana jest procedura heurystyczna zaproponowana do poprawy populacji początkowej. Rozwiązania niezdominowane wyznaczone w bieżącej iteracji umieszczane są w zbiorze A.

Poprawiona populacja jest gotowa do kolejnej iteracji. Proces tworzenia nowych rozwiązań trwa do momentu zatrzymania. Jako warunek zatrzymania określono liczbę pokoleń równą $T = 3000$. Po zatrzymaniu algorytmu wszystkie rozwiązania niezdominowane z poszczególnych pokoleń znajdują się w zbiorze A z niego wybiera się rozwiązania Pareto suboptymalne.

Ponieważ proces wyznaczania rozwiązań niezdominowanych nie jest procesem deterministycznym za każdym uruchomieniem algorytmu można uzyskać inny zbiór rozwiązań. Na rys. 1 pokazano przykładowe rozwiązania Pareto suboptymalne.



Rys. 1. Otrzymane rozwiązania Pareto suboptymalne dla przykładowego przebiegu algorytmu

Decydent stwierdził, że nie interesują go rozwiązania skrajne i dlatego zaproponował odrzucenie 5% rozwiązań dających najwyższe i najniższe wartości funkcji celu. Na podstawie wykresu wybrał zbiór rozwiązań określając, że interesuje go:

- pięć kolejnych rozwiązań z najwyższymi kosztami,
- pięć kolejnych rozwiązań z najniższymi kosztami,
- dziesięć rozwiązań z kosztami w granicach od 5 do 6 mln zł.

W tabeli 4 podano zbiór rozwiązań, które zostały wybrane przez decydenta według określonych powyżej zasad.

Tabela 4

Rozwiązania wybrane przez decydenta

Kryterium		Wielkość zapotrzebowania na materiał		
Koszt mln zł	odchylenia	Z_1 materiał M_1	Z_2 materiał M_2	Z_3 materiał M_3
1	2	3	4	5
3,477	0,557	145794	4677	3256
3,504	0,555	145794	4768	3258
3,539	0,553	145794	4888	3258
3,619	0,547	145794	5159	3253
3,636	0,546	145794	5213	3251
5,067	0,460	147465	9974	3252
5,136	0,458	159982	9624	3260

cd. tabeli 4

1	2	3	4	5
5,205	0,455	155236	10074	3276
5,278	0,453	163197	9955	3242
5,352	0,449	171928	9796	3269
5,547	0,442	177335	10204	3256
5,621	0,439	189051	9908	3275
5,743	0,435	195890	10004	3285
5,836	0,431	195972	10316	3262
5,975	0,426	214871	9909	3243
6,002	0,424	221622	9687	3250
7,519	0,377	296207	11344	3258
7,863	0,370	321179	11345	3274
7,991	0,368	344494	10695	3269
8,067	0,365	338193	11248	3256

Podsumowanie

Zaproponowany algorytm VEGA umożliwia wyznaczenie skończonego zbioru rozwiązań niezdominowanych. Z rozwiązań tych decydent może wybrać rozwiązanie, które uważa za najlepsze, może też wykorzystać metody stosowane do rozwiązywania wielokryterialnych zagadnień deterministycznych. Na rys. 1 przedstawiona jest aproksymacja pewnej wypukłej funkcji określającej zależność pomiędzy sumarycznymi wielkościami odchylenia od wartości historycznych a kosztem. Na podstawie tej funkcji decydent może zakładając minimalny koszt, jaki jest skłonny ponieść na zakup materiałów, może oszacować sumaryczne minimalne odchylenia zapotrzebowania od wartości historycznych. Może też odwrócić sytuację i przy założonych maksymalnych odchyleniach zapotrzebowania od wartości historycznych oszacować minimalny koszt. Aproksymowana otrzymanymi rozwiązaniami Pareto suboptymalnymi funkcja wydaje się analogiczna do funkcji określającej rozwiązana sprawne z modelu Markowitza w analizie portfelowej.

Działanie algorytmu genetycznego wymaga ustalenia pewnych parametrów, np. prawdopodobieństwo krzyżowania oraz mutacji, liczby iteracji czy też rozmiaru populacji. Parametry te ustala się w sposób eksperymentalny. Należy również pamiętać, że zastosowanie algorytmu genetycznego powoduje, że za każdym przebiegiem algorytmu otrzymać można inny zbiór rozwiązań będący aproksymacją funkcji określającej zależność pomiędzy kryteriami.

Literatura

- Ameljańczyk A.: Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania. Ossolineum, Wrocław 1984.
- Branke J., Deb K., Miettinen K., Słowiński R.: Multiobjective Optimization – Interactive and Evolutionary Approaches Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2008.
- Multiple Criteria Decision Analysis. State of the art Surveys. Red. J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott. Springer Science, 2005.
- Goldberg D.E.: Algorytmy genetyczne i ich zastosowania. WNT, Warszawa 1998.
- Jakowska-Suwalska K., Sojda A., Wolny M.: Statystyczna analiza zapotrzebowania na kruszniki w grupie kopalń węgla kamiennego. Materiały konferencji Górnictwo Zrównoważonego Rozwoju 2011. Gliwice 2011.
- Jakowska-Suwalska K., Sojda A., Wolny M.: Wspomaganie planowania wielkości zamówień w kopalni węgla kamiennego za pomocą modelu wielokryterialnego przy ograniczeniach kosztowych. Materiały konferencji Górnictwo Zrównoważonego Rozwoju 2011. Gliwice 2011.
- Konarzewska-Gubała E.: Programowanie przy wielorakości celów. PWN, Warszawa 1980.
- Kukuła K.: Metoda unitaryzacji zerowej. PWN, Warszawa 2000.
- Miettinen K.: Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston 1998.
- Michalewicz Z.: Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne. WNT, Warszawa 1996.
- Nowak M.: Interaktywne wielokryterialne wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka. Metody i zastosowania. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2008.
- Ogryczak W.: Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna. Uniwersytet Warszawski, Warszawa 1997.
- Roy B., Bouyssou D.: Aide Multicritere a la Decision: Methodes et Cas. Economica, Paris 1993.
- Schaffer J.D.: Some Experiments in Machine Learning Using Vector Evaluated Genetic Algorithms. PhD Dissertation. Vanderbilt University, Nashville 1984.
- Wolny M., Jakowska-Suwalska K., Sojda A.: Analiza dostaw kleju poliuretanowego w grupie kopalń węgla kamiennego. Materiały konferencji Górnictwo Zrównoważonego Rozwoju 2011. Gliwice 2011.

USE OF VEGA ALGORITHM TO DETERMINE THE LEVEL OF ORDERS FOR MATERIALS IN THE MINING ENTERPRISE

Summary

This paper presents an application of multiobjective nonlinear problems, to assist in planning the size of the demand for materials in the coal mine. To solve the problem proposed genetic algorithm VEGA (Vector Evaluated called Genetic Algorithm)

in multicriteria optimization. For example, some materials used in the production process, and shows the application of the algorithm chosen by the decision maker a set of Pareto sub-optimal Solutions.

Katarzyna Jakowska-Suwalska

Maciej Wolny

Politechnika Śląska w Gliwicach

PROCEDURA WSPOMAGANIA USTALENIA WIELKOŚCI ZAPOTRZEBOWANIA NA MATERIAŁY W KOPALNI WĘGLA KAMIENNEGO*

Wprowadzenie

Produkcyjną działalność przedsiębiorstwa górniczego wyróżnia w znacznej mierze niezdeterminowany charakter wielkości potrzeb materiałowych. Wynika to przede wszystkim z geologicznych warunków wydobywania węgla kamiennego. Praktycznie nie jest możliwe dokładne zaplanowanie przyszłego zapotrzebowania na większość materiałów na podstawie planów produkcji.

Podstawą do budowy planu potrzeb materiałowych jest plan techniczno-ekonomiczny, w którym określone są: budżet, wielkości wydobywania i postęp robót przygotowawczych na kolejny rok, z podziałem na miesiące. Wielkości zapotrzebowania na poszczególne materiały zwykle ustalane są na podstawie wiedzy eksperckiej, która z kolei opiera się na doświadczeniu i wiedzy historycznej. Planowanie rozpoczyna się z około rocznym wyprzedzeniem (na kolejny rok, prace nad planami rozpoczynają się najpóźniej z pierwszej połowie roku poprzedniego). Aspekty procesu planowania potrzeb materiałowych w przedsiębiorstwie górniczym wskazują na jego relatywnie długoterminowy charakter. Ponadto, eksperci podejmujący decyzję dotyczące planowanych wielkości zapotrzebowania działają zwykle w warunkach niepewności i ryzyka. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie propozycji procedury wspomaganie decydena w planowaniu przyszłych potrzeb materiałowych w ramach istniejącego systemu.

* Praca została zrealizowana w ramach projektu badawczego 5520/B/T02/2010/38 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

1. Postać modelu

W planowaniu wielkości zapotrzebowania na materiały w kopalni uwzględnia się plany wydobywania i związane z nim planowane metry robót przygotowawczych, planowane liczby zbrojonych i likwidowanych ścian, ponieważ potrzeby materiałowe reprezentują popyt zależny (od wielkości produkcji). W związku z tym, w dalszej części pracy wielkości zapotrzebowania na każdy materiał związane będą z odpowiednim typem produkcji (wydobywanie, zbrojenie, likwidacja ścian, roboty przygotowawcze), dla której jest on przeznaczony. Jako jednostkę produkcji przyjęto jednostki odpowiednie dla typów produkcji, np. dla wydobywania – tony, dla robót przygotowawczych – metry bieżące, dla zbrojenia i likwidacji ścian ich liczbę lub metry. Przyjęto, że wielkości z_i zapotrzebowania jednostkowego na materiał M_i wyrażone będą w jednostkach naturalnych dla materiału M_i na jednostkę produkcji, w której jest on zużywany. Jeśli jeden materiał zużywany jest w różnych typach produkcji, w modelu będzie on występował jako różne materiały (będzie ich tyle, ile razy występuje on w różnych typach produkcji). Wielkość zapotrzebowania łącznego Z_i na materiał M_i będzie wyznaczana ze wzoru $Z_i = W_i z_i$, gdzie W_i to planowana wielkość produkcji, na którą przeznaczony jest materiał M_i .

W celu konstrukcji modelu wspomagającego planowanie wielkości zapotrzebowania na materiały $M_1, M_2, \dots, M_l$, podzielono na pięć grup, wynikających z możliwości wykorzystania danych historycznych, składowych szeregów czasowych oraz występowania współzależności między wielkościami zużycia materiałów.

Grupa pierwsza to materiały M_i ($i = 1, 2, \dots, r$), których zużycie na jednostkę produkcji (zapotrzebowanie jednostkowe) jest zmienną losową X_i o znanej dystrybucji F_i i decydent uważa, że przyszła wielkość zapotrzebowania jednostkowego może być planowana na podstawie danych historycznych. Należy przyjąć takie wielkości zapotrzebowania na materiały M_i , aby z jak największym prawdopodobieństwem pokryły one popyt na te materiały. Planowane wielkości z_i powinny być dodatkowo odpowiednio niskie oraz nie powinny odchyłać się zbyt wiele od przeszłych wartości. Założono, że wielkości $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ zużycia jednostkowego materiału M_i ($i = 1, 2, \dots, r$) w n poprzednich historycznych okresach nie wykazują trendu, ani wahań okresowych.

Grupa druga to materiały M_i ($i = r + 1, r + 2, \dots, w$), których zapotrzebowanie wykazuje trend lub trend i/lub wahania okresowe, a decydent przyjął, że ta tendencja zostanie utrzymana w planowanym okresie. Można zatem

znanyymi metodami prognostycznymi (np. trend liniowy, modele adaptacyjne) wyznaczyć prognozę z_i^* zapotrzebowania jednostkowego na materiał M_i w planowanym okresie. Należy przyjąć więc taką wielkość zapotrzebowania jednostkowego z_i na materiał M_i , aby w możliwe niewielkim stopniu odchyłała się od wyznaczonej prognozy z_i^* .

Grupa trzecia to materiały M_i ($i = w + 1, w + 2, \dots, s$), których plan zużycia nie może się opierać na danych historycznych (np. w związku ze zmianą technologii, materiały nowe). Decydent powinien więc sam lub przy pomocy ekspertów wyznaczyć prognozę z_i^* wielkości zapotrzebowania jednostkowego na materiał M_i w planowanym okresie. Należy zamówić zatem taką ilość Z_i materiału M_i , aby wielkości zapotrzebowania jednostkowego z_i w możliwe niewielkim stopniu odchyłały się od wyznaczonej prognozy z_i^* .

Grupa czwarta to materiały M_j ($j = s + 1, s + 2, \dots, q$), dla których istnieją materiały $M_{j_1}, M_{j_2}, \dots, M_{j_h}$ z grupy pierwszej, drugiej lub trzeciej, że zachodzi dokładna zależność funkcyjna

$$x_{jt} = f_j(x_{j_1t}, x_{j_2t}, \dots, x_{j_h t}), t = 1, 2, \dots, n$$

gdzie:

x_{jt} – zużycie jednostkowe materiału M_j w okresie t ,

$x_{j_u t}$ – zużycie jednostkowe materiału M_{j_u} w okresie t .

Zależność ta zostanie utrzymana w okresie, na który sporządzany jest plan zakupów.

Zatem wielkość zapotrzebowania z_j na materiał M_j będzie równa $z_j = f_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_h})$, gdzie z_{j_u} to planowana wielkość zapotrzebowania na materiał M_{j_u} ($u = 1, 2, \dots, h$).

Grupa piąta to materiały M_j ($j = q + 1, q + 2, \dots, l$), dla których istnieją materiały $M_{j_1}, M_{j_2}, \dots, M_{j_v}$ z grupy pierwszej, drugiej lub trzeciej, dla których zachodzi zależność funkcyjna

$$x_{jt} = f_j(x_{j_1t}, x_{j_2t}, \dots, x_{j_v t}, \varepsilon_t), t = 1, 2, \dots, n$$

gdzie:

x_{jt} – zużycie jednostkowe materiału M_j w okresie t ,

$x_{j_u t}$ – zużycie jednostkowe materiału M_{j_u} ($u = 1, 2, \dots, v$) w okresie t ,

ε_t – czynnik losowy.

Zależność ta zostanie utrzymana w okresie, na który sporządzany jest plan zakupów.

W tym przypadku metodami ekonometrycznymi można oszacować nieznane parametry modelu i zbudować model oszacowany w postaci

$$\hat{x}_j = \hat{f}_j(x_{j_1 t}, x_{j_2}, \dots, x_{j_v})$$

gdzie: $\hat{x}_j$ to teoretyczne wartości modelu.

Wielkość zapotrzebowania z_j na materiał M_j nie powinna się zbytnio odchyłać od wielkości $\hat{f}_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_v})$, gdzie z_{j_u} to planowana wielkość zapotrzebowania jednostkowego na materiał M_{j_u} ($u = 1, 2, \dots, v$).

W ogólnym modelu ustalania wielkości zapotrzebowania, jako kryteria oceniające wielkości zapotrzebowania przyjęto:

(a) prawdopodobieństwo pokrycia zapotrzebowania z_i na materiały grupy pierwszej,

(b) odchylenia wielkości zapotrzebowania z_i od wyznaczonej prognozy z_i^* dla materiałów grupy drugiej i trzeciej,

(c) wielkość zapotrzebowania z_i dla materiałów grupy pierwszej,

(d) odchylenia wielkości zapotrzebowania z_j od wartości

$$\hat{f}_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_v})$$

dla materiałów M_j grupy piątej.

(e) odchylenia wielkości zapotrzebowania z_i od rzeczywistych wielkości zapotrzebowania $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ materiału M_i w ostatnich n okresach dla materiałów z grupy pierwszej.

Dodatkowo zakłada się, że koszty zakupu wszystkich materiałów: $M_1, M_2, \dots, M_l$ nie mogą przekroczyć pewnej zadanej kwoty K .

Model można zapisać w postaci

$$\begin{cases}
 F_i(z_i) \rightarrow \max, i = 1, 2, \dots, r & (a) \\
 |z_i^* - z_i| \rightarrow \min, i = r + 1, r + 2, \dots, s & (b) \\
 z_i \rightarrow \min, i = 1, 2, \dots, r & (c) \\
 |z_j - \hat{f}_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_n})| \rightarrow \min, j = q + 1, q + 2, \dots, l & (d) \\
 |x_{it} - z_i| \rightarrow \min, i = 1, 2, \dots, r, t = 1, 2, \dots, n & (e) \\
 z_j = f_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_n}) j = s + 1, s + 2, \dots, q \\
 \sum_{i=1}^l c_i W_i z_i \leq K \\
 z_i^{lower} \leq z_i \leq z_i^{upper} \\
 W_i z_i \in S_i \\
 i = 1, 2, \dots, s, q + 1, q + 2, \dots, l
 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

c_i – cena jednostki materiału M_i ,

z_i – wielkość zapotrzebowania jednostkowego na materiał M_i ,

W_i – planowana wielkość produkcji, na którą przeznaczony jest materiał M_i ,

S_i – zbiór wyznaczony na podstawie dodatkowych warunków na wielkość zapotrzebowania łącznego $Z_i = W_i z_i$ materiału M_i (np. S_i to zbiór liczb naturalnych),

z_i^* – prognozowana wielkość zapotrzebowania na materiał M_i dla materiałów grupy drugiej i trzeciej,

$$\begin{aligned}
 z_i^{lower} &\leq \begin{cases} \min(z_i^*, \min(x_{it}; t = 1, 2, \dots, n)), i = r + 1, r + 2, \dots, s, \\ \min(x_{it}; t = 1, 2, \dots, n), i = 1, 2, \dots, r, \\ \min(\hat{f}_i(x_{i_1t}, x_{i_2t}, \dots, x_{i_nt}), t = 1, 2, \dots, n), i = q + 1, q + 2, \dots, l, \end{cases} \\
 z_i^{upper} &\geq \begin{cases} \max(z_i^*, \max(x_{it}; t = 1, 2, \dots, n)), i = r + 1, r + 2, \dots, s, \\ \max(x_{it}; t = 1, 2, \dots, n), i = 1, 2, \dots, r \\ \max(\hat{f}_i(x_{i_1t}, x_{i_2t}, \dots, x_{i_nt}), t = 1, 2, \dots, n), i = q + 1, q + 2, \dots, l, \end{cases}
 \end{aligned}$$

x_{it} – zużycie jednostkowe materiału M_i w okresie t ($t = 1, 2, \dots, n$).

Wartości z_i^{lower} , z_i^{upper} mogą być wyznaczone przez decydenta na podstawie doświadczenia.

Jeśli decydent dodatkowo założy dla materiału M_i maksymalny poziom (poziom aspiracji) F_i^a prawdopodobieństwa pokrycia zapotrzebowania na materiał, to w modelu dodatkowo pojawi się ograniczenie

$$F_i(z_i) \leq F_i^a$$

W celu możliwości porównania wyników wartości funkcji celów w grupach (b), (c), (d) należy przeprowadzić unitaryzację¹. Zaproponowano unitaryzację w postaci

$$z_i^u = \frac{z_i - z_i^{lower}}{A_i}, \quad z_i^{*u} = \frac{z_i^* - z_i^{lower}}{A_i}, \quad x_{it}^u = \frac{x_{it} - z_i^{lower}}{A_i} \quad (2)$$

gdzie $A_i = z_i^{upper} - z_i^{lower}$.

Do wyznaczenia wielkości zapotrzebowania zaproponowano skalaryzację poprzez wprowadzenie ważonych funkcji celu i leksykograficzne programowanie celowe.

Przyjęto oznaczenia:

$u_1, u_2, \dots, u_l$ – wagi nadane przez decydenta poszczególnym materiałom,

$w_1, w_2, \dots, w_n$ – wagi nadane poszczególnym okresom historycznym,

$v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z*+}, v_i^{z*-}, v_i^{z+}, v_j^{f_j+}, v_j^{f_j-}$ – zmienne celowe.

¹ K. Miettinen: Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston 1998; K. Kukula: Metoda unitaryzacji zerowej. PWN, Warszawa 2000; Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Słowiński: Multiobjective Optimization – Interactive and Evolutionary Approaches. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.

Model może przyjąć wtedy postać

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^r u_i v_i^{F+} \rightarrow \min, & (a) \\
 \sum_{i=r+1}^s u_i (v_i^{z*-} + v_i^{z*+}) \rightarrow \min, & (b) \\
 \sum_{i=1}^r u_i v_i^{z+} \rightarrow \min, & (c) \\
 \sum_{j=q+1}^l u_j (v_j^{fj+} + v_j^{fj-}) \rightarrow \min, & (d) \\
 \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^r u_i w_t (v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+}) \rightarrow \min, & (e) \\
 F_i(z_i) + v_i^{F+} = F_i^a, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 x_{it}^u - z_i^u - v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 z_i^{*u} - z_i^u - v_i^{z*-} + v_i^{z*+} = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, s, \\
 z_j - \hat{f}_j(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_w}) + v_j^{fj+} - v_j^{fj-} = 0, \quad j = q+1, q+2, \dots, l \\
 z_i^{lower} \leq z_i \leq z_i^{upper}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\
 v_i^{z+}, v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z*-}, v_i^{z*+}, v_j^{fj+}, v_j^{fj-} \geq 0, \\
 \sum_{i=1}^s c_i z_i W_i \leq K, \\
 Z_i = z_i W \in S_i, \\
 t = 1, 2, \dots, n.
 \end{cases} \quad (3)$$

Zaproponowany model jest modelem o liniowych funkcjach celu oraz liniowymi i nieliniowymi ograniczeniami.

2. Procedura wyznaczania wielkości zapotrzebowania

Procedurę wyznaczania wielkości zapotrzebowania przedstawiono w postaci schematu na rys. 1.

Etap 1. Wybór przez decydenta materiałów $M_1, M_2, \dots, M_l$, które będą podlegać procedurze ustalenia wielkości zapotrzebowania.

Etap 2. Ustalenie przez decydenta wag u_i dla materiałów wybranych w etapie E1 na podstawie ich ważności w procesie produkcyjnym.

Etap 3. Podanie przez decydenta prognoz zapotrzebowania na materiały z grupy trzeciej wyznaczonych dzięki wiedzy o przyszłych działaniach kopalni.

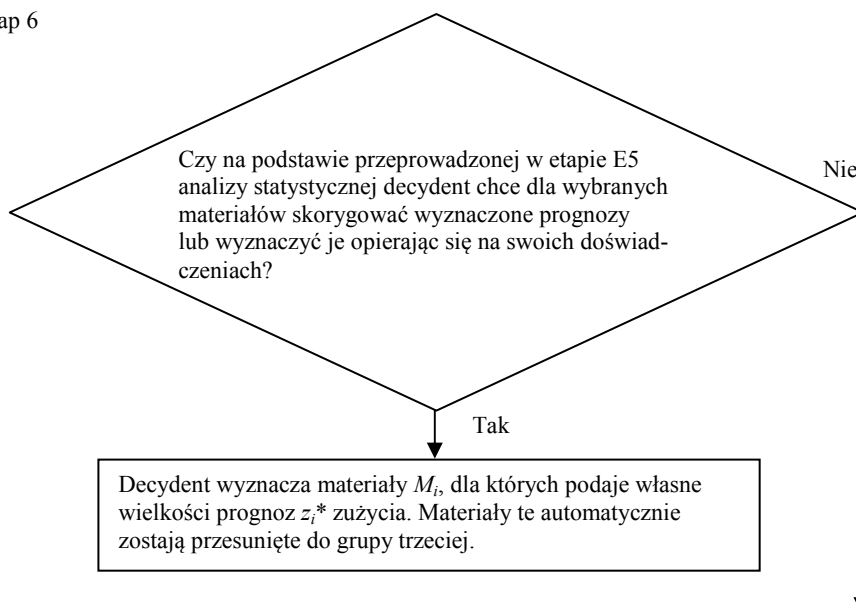
Etap 4. Podanie przez decydenta

- prognozowanej wielkości W_i produkcji w której zużywany jest materiał M_i – prognozowanych cen jednostkowych materiałów $M_1, M_2, \dots, M_l$,
- kwoty K całkowitych wydatków na materiały $M_1, M_2, \dots, M_l$.

Etap 5. Analiza statystyczna zapotrzebowania na materiały na podstawie danych z poprzednich okresów:

- wyznaczenie postaci rozkładu dla materiałów grupy pierwszej,
- wyznaczenie prognoz na podstawie modeli prognostycznych dla materiałów grupy drugiej,
- wyznaczenie ekonometrycznych modeli wielkości zapotrzebowania dla materiałów z grupy piątej,
- wyznaczenie zależności funkcyjnych dla materiałów z grupy czwartej,
- wyznaczenie wartości z_i^{upper}, z_i^{lower} dla materiałów $M_1, M_2, \dots, M_l$.

Etap 6



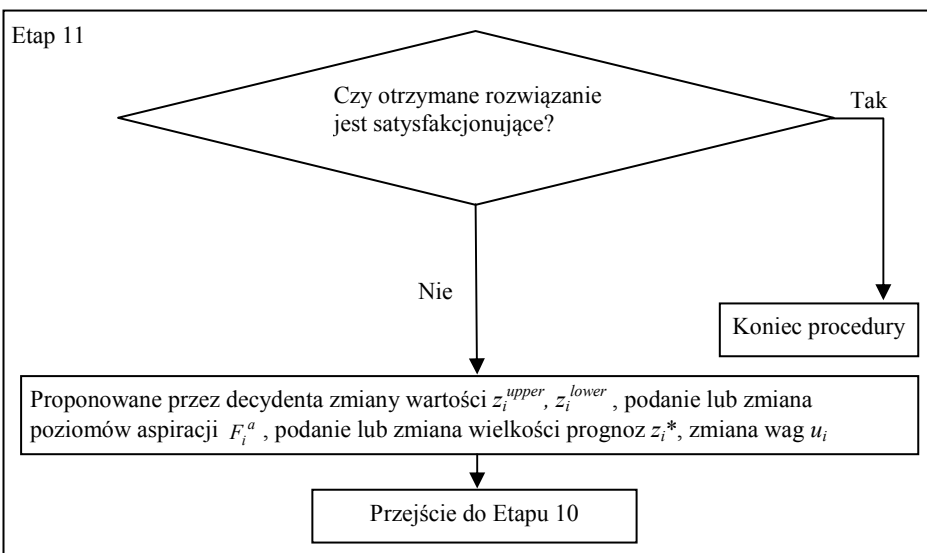
Etap 7. Podanie przez decydenta dla materiałów $M_1, M_2, \dots, M_l$ pożądaných maksymalnych wartości F_i^a (poziomów aspiracji) prawdopodobieństw F_i .

W przypadku braku propozycji zostaną przyjęte wartości $F_i^a = 1$.

Etap 8. Proponowane przez decydenta zmiany wartości z_i^{upper}, z_i^{lower} dla materiałów $M_1, M_2, \dots, M_s$ (w wypadku braku propozycji zmian zachowane zostaną wartości wyznaczone w etapie E5).

Etap 9. Podanie przez decydenta hierarchii (priorytetów) ważności grup funkcji celów (a), (b), (c), (d), (e). W przypadku braku propozycji wyznaczone będzie kilka rozwiązań przy różnych priorytetach ustalonych przez system.

Etap 10. Wyznaczenie wielkości zapotrzebowania na materiały.



Rys. 1. Schemat systemu wspomagającego planowanie wielkości zapotrzebowania

3. Przykład zastosowania procedury wyznaczania wielkości zapotrzebowania na wybrane materiały

Na przykładzie pokazano zastosowanie opisanej procedury do wspomagania ustalenia wielkości zapotrzebowania na kilka materiałów w jednej z kopalń będących oddziałem Kompanii Węglowej S.A.

Etap 1. Do analizy wybrano:

M_1 – drewno kopalniane (używane do obudowy chodników),

M_2 – klej poliuretanowy (używany do uszczelniania wyrobisk),

M_3 – stojaki stalowe cierne (używane do obudowy chodników),

M_4 – krążniki stalowe gładkie M_4 (jeden z elementów przenośników taśmowych).

Etap 2. Przyjęto, że wszystkie rozważane materiały są tak samo ważne w procesie wydobywania, zatem wagi przyporządkowane materiałom M_1, M_2, M_3, M_4 to $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0,25$.

Etap 3. Założono, że wielkości zapotrzebowania będą wyznaczone na podstawie danych historycznych (miesięczne dane z dwóch lat 2009-2010 ($t = 1, 2, \dots, 24$)) zużycia materiałów: M_1, M_2, M_3, M_4 . Żaden z tych materiałów nie należy zatem do trzeciej grupy.

Etap 4. Materiały M_1, M_2, M_3 używane są w czasie robót przygotowawczych, a więc ich zużycie (zapotrzebowanie) będzie wyrażone w jednostkach naturalnych na metr robót przygotowawczych. Materiał M_4 – krążnik, jako element przenośników taśmowych jest materiałem uczestniczący bezpośrednio w procesie wydobywania, stąd jego zapotrzebowanie wyrażone będzie w sztukach na tonę wydobywania. Zapotrzebowanie analizowanych materiałów wyrażone będzie w następujących jednostkach:

M_1 – drewno kopalniane w m^3 na metr robót przygotowawczych,

M_2 – klej poliuretanowy w kg na metr robót przygotowawczych,

M_3 – stojaki stalowe cierne w sztukach na metr robót przygotowawczych,

M_4 – krążniki w sztukach na tonę wydobywania.

W tabeli 1 podano planowane wielkości wydobywania, liczby metrów robót przygotowawczych, prognozowane ceny jednostkowe zakupu materiałów M_1, M_2, M_3, M_4 oraz kwotę przeznaczoną na realizację zapotrzebowania w planowanym okresie.

Tabela 1

Ceny jednostkowe materiałów M_1, M_2, M_3, M_4 , planowane roczne wydobywanie, planowana liczba metrów robót przygotowawczych, roczna kwota wydatków na zamawiane materiały

Prognozowana średnia cena kg kleju – c_1	13,75 zł
Prognozowana średnia cena za m^3 drewna – c_2	296 zł
Prognozowana średnia cena za stojak stalowy cierny – c_3	490 zł

cd. tabeli 1

Prognozowana średnia cena za krążnik – c_4	16,96 zł
Planowane wydobywanie – W_4	3972000 t
Planowana liczba metrów robót przygotowawczych – W_1, W_2, W_3	14000
Maksymalna kwota przeznaczona na zakup materiałów – K	9 500 000 zł

Źródło: Dane kopalni.

Etap 5. Na podstawie medianowego testu serii na poziomie istotności 0,05 stwierdzono, że wielkości zużycia drewna kopalnianego, kleju poliuretanowego, stojaków oraz krążników wykazują losowość.

W tabeli 2 podano wartości współczynników korelacji pomiędzy zapotrzebowaniem jednostkowym (zużyciem jednostkowym) na materiały: M_1, M_2, M_3, M_4 .

Tabela 2

Współczynniki korelacji pomiędzy zapotrzebowaniem jednostkowym na analizowane materiały

	Zapotrzebowanie na klej	Zapotrzebowanie na drewno	Zapotrzebowanie na stojaki	Zapotrzebowanie na krążniki
Zapotrzebowanie na klej	1			
Zapotrzebowanie na drewno	0,396	1		
Zapotrzebowanie na stojaki	0,262	2	1	
Zapotrzebowanie na krążniki	-0,229	-0,001	0,199	1

Na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że wszystkie współczynniki korelacji są statystycznie nieistotne. Można zatem przyjąć, że nie istnieją zależności liniowe pomiędzy historycznymi zapotrzebowaniami jednostkowymi na materiały M_1, M_2, M_3, M_4 . Na poziomie istotności 0,05 testem Kołmogorowa-Smirnowa wykazano, że nie można odrzucić hipotezy o rozkładzie normalnym wielkości zapotrzebowania na drewno kopalniane, klej poliuretanowy, stojaki oraz krążniki. Na podstawie wielkości zużycia zostały wyznaczone wartości z_i^{upper}, z_i^{lower} dla materiałów M_1, M_2, M_3, M_4 .

Tabela 3

Wartości z_i^{upper} , z_i^{lower} dla materiałów M_1, M_2, M_3, M_4

	z_i^{lower}	z_i^{upper}
Klej	4,6790	55,9392
Drewno	0,3313	1,5432
Stojaki	0,1473	0,2826
Krażniki	0,0021	0,0082

Wielkości zużycia materiałów M_1, M_2, M_3, M_4 zostały zunitaryzowane za pomocą wzoru (2). W tabeli 4 podano wartości średniej, odchylenia standardowego oraz postać rozkładu dla zunitaryzowanych wartości zużycia materiałów M_1, M_2, M_3, M_4 .

Tabela 4

Wartości średnie, odchylenia standardowe oraz postaci rozkładu

	Średnia	Odchylenie standardowe	Rozkład
Klej	0,457	0,253	$N(0,457; 0,253)$
Drewno	0,449	0,220	$N(0,449; 0,220)$
Stojaki	0,422	0,264	$N(0,422; 0,264)$
Krażniki	0,446	0,293	$N(0,446; 0,293)$

Na podstawie przeprowadzonej analizy można przyjąć, że wszystkie rozważane materiały należą do grupy pierwszej.

Etap 6. Decydent nie wprowadził żadnych zmian w wyznaczonych wartościach.

Etap 7. Przyjęto wartości z_i^{upper} , z_i^{lower} ($i = 1, 2, 3, 4$) wyznaczone w etapie 5.

Etap 8. Decydent nie podał poziomów aspiracji dla prawdopodobieństw.

Etap 9. Decydent stwierdził, że wszystkie kryteria są jednakowo ważne.

Etap 10. Wielkości zapotrzebowania na materiały M_1, M_2, M_3, M_4 wyznaczone zostaną metodą programowania leksykograficznego przy użyciu modelu (3) z kryteriami (a), (c), (e) przy założeniu, $S_i = N$ ($i = 1, 2, 3, 4$) i wagami harmonicznymi

$$w_t = w_{t-1} + \frac{1}{24(25-t)} \quad (4)$$

w celu postarzania obserwacji.

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^4 v_i^{F+} \rightarrow \min, & (a) \\
 \sum_{i=1}^4 v_i^{z-} \rightarrow \min, & (c) \\
 \sum_{i=1}^4 \sum_{t=1}^{24} w_t (v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+}) \rightarrow \min, & (e) \\
 F_i(z_i) + v_i^{F+} = 1, \\
 x_{it}^u - z_i^u - v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} = 0, \\
 z_i^u + v_i^{z+} = 0, \\
 0 \leq z_i^u \leq 1, \\
 v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z+} \geq 0, \\
 i = 1, 2, 3, 4, t = 1, 2, \dots, 24, \\
 \sum_{i=1}^4 c_i z_i W_i \leq K.
 \end{cases} \quad (5)$$

Przyjęto, że poszczególne funkcje celu (a), (c), (e) mają nadane następujące priorytety

- P1 – (a), P2 – (c), P3 – (e) (rozwiązanie 1),
- P1 – (a), P2 – (e), P3 – (c) (rozwiązanie 2),
- P1 – (c), P2 – (a), P3 – (e) (rozwiązanie 3),
- P1 – (e), P2 – (a), P3 – (c) (rozwiązanie 4),
- P1 – (e), P2 – (c), P3 – (a) (rozwiązanie 5).

Zagadnienie rozwiązano w arkuszu kalkulacyjnym EXCEL 2010 wykorzystując narzędzie Solver, stosując dostępne metody rozwiązania – nieliniową oraz ewolucyjną. Przy zastosowaniu obu metod otrzymano takie same rozwiązania. Rozwiązania te zapisano w tabeli 5.

Tabela 5

Rozwiązania zagadnienia z wykorzystaniem modelu (5)

	Wielkości zapotrzebowania				Wartości prawdopodobieństwa				Koszt
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	F_1	F_2	F_3	F_4	
1	165719	18939	3997	38731	0,1030	0,9632	0,9872	0,9972	10 499 988,01
2	166111	18921	3997	38728	0,1035	0,9628	0,9872	0,9971	10 499 999,13
3	381356	13162	2077	19683	0,4739	0,5961	0,5459	0,5323	10 491 150,68
4	346665	13436	2482	31835	0,3986	0,6243	0,7130	0,9630	10 499 801,35
5	346202	13436	2495	31835	0,3976	0,6243	0,7178	0,9630	10 499 805,10

Gdy decydent nie wskaże jednego wariantu, do wyboru rozwiązania można wykorzystać jedną z metod wieloatrybutowego wspomaganie decyzji w sytuacji braku informacji o preferencjach². Jak można zauważyć, całkowity koszt nie różnicuje w istotny sposób otrzymanych rozwiązań (maksymalna różnica kosztu wariantów rozwiązań stanowi ok. 0,08% średniego kosztu wszystkich rozwiązań, a współczynnik zmienności kosztu rozwiązań nie przekracza 0,04%). Ponadto koszt każdego z rozwiązań zgodnie z otrzymanym rozwiązaniem spełnia warunek budżetowy. Istotnymi kryteriami są więc prawdopodobieństwa pokrycia zapotrzebowania na poszczególne materiały.

Biorąc pod uwagę przesłanki, że żadne z rozwiązań nie jest zdominowane oraz istotą zagadnienia jest maksymalne pokrycie przez plan przyszłego zapotrzebowania, do wyboru można wykorzystać metodę maximin³

$$R^* = \max_h \min_i F_{hi} \quad (7)$$

gdzie: R^* oznacza wybrane rozwiązanie, F_{hi} to prawdopodobieństwo pokrycia zapotrzebowania na i -ty materiał dla h -tego rozwiązania.

Metoda ta, realizując ideę wyrównywania, wskazuje rozwiązanie maksymalizujące minimalne pokrycie zapotrzebowania na materiały. W sytuacji, gdy formuła (7) wskaże więcej niż jedno rozwiązanie, rekomenduje się ponowne jej zastosowanie dla kolejnych minimów.

W rozpatrywanym przykładzie rozwiązanie 3 gwarantuje maksymalizację minimalnego prawdopodobieństwa pokrycia zapotrzebowania (jednostkowego) na materiały (prawdopodobieństwo to wynosi 0,4739).

Podsumowanie

W pracy przedstawiono propozycję procedury ustalenia wielkości zapotrzebowania na materiały w przedsiębiorstwie górniczym, która ma na celu wspomaganie decydenta przy planowaniu potrzeb materiałowych. Za podstawę budowy procedury przyjęto maksymalizację prawdopodobieństwa pokrycia popytu na materiały opierając się na analizie danych historycznych. Kluczową rolę w procedurze pełni przypisanie materiałów do odpowiednich grup. Grupy materiałów wyróżniono na podstawie:

² Ch.-L. Hwang, K. Yoon: Multiple Attribute Decision Making. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1981.

³ J. Neumann, O. Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, Princeton, New York 1944.

- możliwości bazowania na danych historycznych przy ich planowaniu (grupa trzeci – przy braku takiej możliwości),
- składowych szeregu czasowego wielkości ich historycznego zużycia (grupa pierwsza, grupa druga),
- współzależności wielkości zużycia względem innych materiałów (grupa czwarta, grupa piąta).

W zależności od przynależności do grup przyjęto następujące grupy kryteriów oceny planowanej wielkości zapotrzebowania na materiały:

- prawdopodobieństwo pokrycia zapotrzebowania na materiały (grupa pierwsza),
- wielkość potrzeb materiałowych (grupa pierwsza),
- odchylenia wielkości zapotrzebowania od wartości prognozowanych lub wynikających z zależności (wszystkie grupy).

Przedstawiony przykład wykorzystania procedury dotyczy materiałów związanych bezpośrednio z procesem wydobywania węgla kamiennego. Materiały te przypisano do pierwszej grupy materiałów. Przy wyznaczeniu rozwiązania wykorzystano metodę leksykograficznego programowania celowego z wykorzystaniem interakcji z decydem przy określaniu priorytetów materiałów, funkcji celu oraz poziomów aspiracji. W przypadku braku decyzji decydenta o priorytetach funkcji celu zaproponowano wykorzystanie metody maximin.

Literatura

- Branke J., Deb K., Miettinen K., Słowiński R.: *Multiobjective Optimalization – Interactive and Evolutionary Approaches*. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.
- Hwang Ch.-L., Yoon K.: *Multiple Attribute Decision Making*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1981.
- Kukuła K.: *Metoda unitaryzacji zerowej*. PWN, Warszawa 2000.
- Miettinen K.: *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boston 1998.
- Multiple Criteria Decision Analysis. State of the art Surveys. Eds. J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott. „Springer Science” 2005.
- Neumann J., Morgenstern O.: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New York 1944.

A SUPPORTING PROCEDURE FOR ESTABLISHING DEMAND VOLUMES FOR MATERIALS IN HARD COAL MINE

Summary

The paper presents a facilitating procedure of the material planning requirements for a coal mining company. To determine the size of the materials are used the multi-criteria model, the lexicographic goal programming and the maximin method. The main criteria in the site procedure are probabilities of covering the future demand for materials. The Application of the procedure is shown in the example of fixing a contract for mining wood, polyurethane adhesive, steel racks and smooth steel idlers.

Agnieszka Przybylska-Mazur

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ZNACZENIE INERCJI INFLACJI PRZY PODEJMOWANIU OPTYMALNYCH DECYZJI

Wprowadzenie

Inercja rozumiana jako uporczywość inflacji jest we współczesnym świecie bardzo powszechna. Wśród ekonomistów panuje duża zgodność, co również potwierdzają doświadczenia empiryczne, że inflacja cechuje się uporczywością. Zatem przy podejmowaniu decyzji warto mieć na uwadze fakt, że dopuszczenie do chwilowego wzrostu inflacji, dzięki któremu można zwiększyć wzrost gospodarczy, może spowodować w późniejszym okresie podejmowanie kosztownych działań mających na celu jej obniżenie.

Inercja inflacji ma różne źródła. Ich identyfikacja ma, zdaniem Fuhrera¹, konsekwencje dla wyboru właściwej polityki pieniężnej.

Przy podejmowaniu decyzji, oprócz obecnie obserwowanych wartości zmiennych docelowych, takich jak np. inflacja lub luka produkcyjna, można również uwzględniać inercję umożliwiającą wykorzystanie przeszłych wartości zmiennych docelowych.

W związku z tym, w artykule zostały zaprezentowane dwa warianty wybranego modelu strukturalnego Woodforda²: model nieuwzględniający inercji inflacji oraz model z inercją inflacji. Na podstawie tych dwóch wariantów modelu zostały wyznaczone odpornie optymalne reguły instrumentalne, które wykorzystano do oceny znaczenia inercji inflacji przy podejmowaniu optymalnych decyzji monetarnych i inwestycyjnych.

¹ J.C. Fuhrer: The Persistence of Inflation and the Cost of Disinflation. „New England Economic Review” 1995, January/February.

² M.P. Giannoni, M. Woodford: Optimal Interest-Rate Rules: II. Application. NBER Working Paper No. W9420, January 2003.

1. Reguły instrumentalne

Jednym z rodzajów reguł polityki pieniężnej są reguły instrumentalne. Można je zapisać w ogólnej postaci następująco³

$$\varphi_i \cdot i_t + \Phi_z^T \cdot z_t + \Phi_Z^T \cdot Z_t + \Phi_s^T s_t = \varphi \quad (1)$$

gdzie:

i_t – instrument polityki monetarnej w okresie t ,

z_t – wektor, którego współrzędnymi są zmienne endogeniczne w okresie t ,

Z_t – wektor, którego współrzędnymi są opóźnienia zmiennych endogenicznych występujących w wektorze z_t ,

s_t – wektor egzogenicznych zmiennych stanu w okresie t , jako zmienne egzogeniczne można brać pod uwagę zaburzenia, które wpływają na równowagę endogenicznych zmiennych,

φ_i, φ – współczynniki, Φ_z, Φ_Z, Φ_s – wektory współczynników.

Zakładamy, że j -tą współrzędną s_{jt} wektora zaburzeń strukturalnych – wektora egzogenicznych zmiennych stanu można zapisać w następującej postaci⁴

$$s_{jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in S} \alpha_{m,k}^j \varepsilon_{m,t-k} \quad (2)$$

dla $j = 1, 2, \dots, N$

gdzie:

N – jest liczbą zaburzeń strukturalnych, czyli liczbą egzogenicznych zmiennych stanu,

S – zbiór wszystkich możliwych typów zaburzeń,

$\varepsilon_{m,t}$ – są zmiennymi losowymi o identycznych i niezależnych rozkładach o średniej zero.

Regułę, której wyraz wolny jest stały w czasie nazywamy odpornie optymalną, jeżeli jest optymalna z ponadczasowej perspektywy niezależnie od określenia współczynników $\alpha_{m,k}^j$ strukturalnych zaburzeń i niezależnie od rozkładów składników losowych $\varepsilon_{m,t}$ (oprócz tego muszą być ograniczone i mieć średnią równą zero).

³ M.P. Giannoni, M. Woodford: Optimal Interest-Rate Rules: I. General Theory. NBER Working Paper No. W9419, January 2003.

⁴ Ibid.

2. Model optymalizacji mechanizmu transmisji monetarnej

Celem polityki pieniężnej jest minimalizacja oczekiwanej wartości międzyokresowej funkcji straty, czyli rozwiązanie problemu⁵

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L_t \rightarrow \min \quad (3)$$

przy ograniczeniach równań rozpatrywanego modelu strukturalnego.

W powyższym wzorze β jest czynnikiem dyskontującym, L_t – funkcją straty okresowej, która może przyjmować różne postacie, natomiast $E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L_t$ oznacza międzyokresową funkcję straty będącą wartością oczekiwaną E_0 wyznaczaną w czasie $t=0$ sumy zdyskontowanych wartości funkcji straty okresowej L_t .

3. Model strukturalny nieuwzględniający inercji inflacji

Model Woodforda nieuwzględniający inercji inflacji można zapisać za pomocą dwóch równań postaci⁶

$$y_t = E_t y_{t+1} - \alpha \cdot (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t) \quad (4)$$

$$\pi_t = \gamma \cdot y_t + \beta \cdot E_t \pi_{t+1} + u_t \quad (5)$$

gdzie:

π_t – wskaźnik inflacji w okresie t ,

y_t – względna luka produkcyjna,

i_t – instrument polityki pieniężnej np. stopa referencyjna,

E_t – oznacza wartość oczekiwaną wyznaczoną w okresie t ,

α, γ, β – są stałymi, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \beta < 1$.

Składniki r_t , u_t przedstawiają egzogeniczne zaburzenia: r_t jest procesem naturalnej stopy procentowej, u_t – szokiem kosztowym reprezentującym egzogeniczną zmienność w luce spowodowanej np. zmiennymi w czasie zaburze-

⁵ M.P. Giannoni, M. Woodford: Op. cit.

⁶ Ibid.

niami, które zmieniają stopień nieefektywności równowagi elastycznych cen. Te egzogeniczne zaburzenia mają rozkłady o średnich równych zero, wariancjach $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2$ i kowariancji $\sigma_{\varepsilon\eta}$. Ponadto zakładamy, że te egzogeniczne zaburzenia można przedstawić za pomocą wzoru (2) dla $j = 1, 2$.

W pracy równania (4)-(5) definiują warunki ograniczające problemu optymalizacyjnego (3) mechanizmu transmisji monetarnej.

Model opisany równaniami (4)-(5) może być zapisany w postaci macierzowej następująco

$$D \cdot E_t z_{t+1} = \tilde{A} \cdot X_t + C \cdot s_t \quad (6)$$

gdzie

$$z_t = \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix}, E_t z_{t+1} = \begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix}, s_t = \begin{bmatrix} r_t \\ u_t \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{A} = [A \quad B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & -\gamma & 0 \end{bmatrix}, X_t = \begin{bmatrix} z_t \\ i_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ i_t \end{bmatrix}.$$

W pracy weźmiemy pod uwagę następującą postać funkcji straty okresowej L_t

$$L_t = (\pi_t - \pi^*)^2 + \lambda_y \cdot (y_t - y^*)^2 + \lambda_i \cdot (i_t - i^*)^2 \quad (7)$$

dla pewnych optymalnych poziomów y^* luki produkcyjnej, i^* nominalnej stopy procentowej, jak również dla celu inflacyjnego π^* .

Funkcję straty okresowej (7) można zapisać w postaci macierzowej następująco

$$L_t = \frac{1}{2} \cdot (c_t - c^*)^T \cdot W \cdot (c_t - c^*) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (K \cdot X_t - c^*)^T \cdot W \cdot (K \cdot X_t - c^*) \quad (8)$$

w której c_t oznacza wektor zmiennych celu, $c_t = \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \\ i_t \end{bmatrix}$, $c_t = K \cdot X_t$ dla pewnej macierzy K ,

c^* – wektor optymalnych wartości zmiennych celu $c^* = \begin{bmatrix} \pi^* \\ y^* \\ i^* \end{bmatrix}$,

W jest symetryczną dodatnio określoną macierzą wag w funkcji celu,
 $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$.

1.1. Odpornie optymalna reguła instrumentalna w modelu nieuwzględniającym inercji inflacji

Odpornie optymalna reguła instrumentalna jest rozwiązaniem następującego problemu optymalizacyjnego

$$\begin{cases} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot (K \cdot X_t - c^*)^T \cdot W \cdot (K \cdot X_t - c^*) \right\} \rightarrow \min \\ D \cdot E_t z_{t+1} = \tilde{A} \cdot X_t + C \cdot s_t \end{cases} \quad (9)$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (9), wykorzystamy warunek pierwszego rzędu następującej postaci

$$K^T \cdot W \cdot (K \cdot X_t - c^*) + \tilde{A}^T \cdot \Lambda_t - \beta^{-1} \cdot \tilde{D}^T \cdot \Lambda_{t-1} = \vec{0} \quad (10)$$

gdzie $\vec{0}$ jest wektorem zerowym. Warunek (10) można zapisać równoważnie jako następujący układ równań

$$\begin{cases} \pi_t - \beta^{-1} \cdot \alpha \cdot \Lambda_{1,t-1} + \Lambda_{2,t} - \Lambda_{2,t-1} = 0 \\ \lambda_y \cdot (y_t - y^*) + \Lambda_{1,t} - \beta^{-1} \cdot \Lambda_{1,t-1} - \gamma \cdot \Lambda_{2,t} = 0 \\ \lambda_i \cdot (i_t - i^*) + \alpha \cdot \Lambda_{1,t} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

prawdziwy dla każdego $t \geq 0$ z warunkami początkowymi postaci $\Lambda_{1,-1} = \Lambda_{2,-1} = 0$.

Wykorzystując równanie Eulera postaci⁷

$$B(L)(i_t - i^*) = h_t \quad (12)$$

⁷ Ibid.

gdzie:

$B(L)$ jest wielomianem opóźnień drugiego stopnia,

$$B(L) = 1 - \frac{1}{\beta} \cdot (1 + \beta + \gamma \cdot \alpha) \cdot L + \frac{1}{\beta} \cdot L^2,$$

L^k oznacza operator opóźnień, $L^k i_t = i_{t-k}$,

$$h_t = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\lambda_i} \cdot \pi_t + \frac{\alpha \cdot \lambda_y}{\lambda_i} \cdot \Delta y_t,$$

odpornie optymalną regułę instrumentalną i_t^{BI} wyznaczoną na podstawie modelu nie uwzględniającego inercji inflacji można zapisać w następującej postaci jawnej

$$i_t^{BI} = (1 - \rho_1) \cdot i^* + \rho_1 \cdot i_{t-1} + \rho_2 \cdot \Delta i_{t-1} + \rho_\pi \cdot \pi_t + \rho_y \cdot \frac{\Delta y_t}{4} \quad (13)$$

gdzie: $\rho_1 = 1 + \frac{\gamma \cdot \alpha}{\beta} > 1$, $\rho_2 = \frac{1}{\beta} > 1$, $\rho_\pi = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\lambda_i} > 0$, $\rho_y = \frac{4 \cdot \alpha \cdot \lambda_y}{\lambda_i} > 0$, natomiast $\Delta i_{t-1} = i_{t-1} - i_{t-2}$, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ są przyrostami stopy procentowej i luki produkcyjnej odpowiednio.

4. Model strukturalny z inercją inflacji

Model strukturalny Woodforda z inercją inflacji uwzględnia wewnętrzną inercję w dynamice inflacji. Ten model można zapisać za pomocą dwóch równań postaci⁸

$$y_t = E_t y_{t+1} - \alpha \cdot (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t) \quad (14)$$

$$\pi_t - \mu \cdot \pi_{t-1} = \gamma \cdot y_t + \beta \cdot E_t (\pi_{t+1} - \mu \cdot \pi_t) + u_t \quad (15)$$

gdzie μ jest współczynnikiem wskazującym na występowanie inercji inflacji, przedstawiającym ułamek procentowych wzrostów w indeksie cen.

Jeżeli $\mu = 0$, to w modelu nie jest uwzględniona inercja inflacji i wtedy otrzymujemy model opisany w poprzedniej części pracy. Jeżeli $\mu \in (0, 1]$, to w modelu jest uwzględniona inercja inflacji. Wówczas inflacja w przeszłości jest ważną determinantą obecnej inflacji.

⁸ Ibid.

Model opisany równaniami (14)-(15) można zapisać w równoważnej postaci następująco

$$\hat{D} \cdot \begin{bmatrix} Z_{t+1} \\ E_t z_{t+1} \end{bmatrix} = \hat{\hat{A}} \cdot X_t + C \cdot s_t \quad (16)$$

gdzie: $z_t = \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix}$, $Z_t = \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$, $E_t z_{t+1} = \begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix}$, $s_t = \begin{bmatrix} r_t \\ u_t \end{bmatrix}$,

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 1 \\ -\beta \cdot \mu & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu & 0 & 1 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \hat{A} & B \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} Z_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \\ \pi_t \\ y_t \\ i_t \end{bmatrix}$$

Uwzględniając w analizach model Woodforda z inercją inflacji, w dalszych rozważaniach pod uwagę wzięto następującą postać funkcji straty okresowej

$$L_t = (\pi_t - \mu \cdot \pi_{t-1})^2 + \lambda_y \cdot (y_t - y^*)^2 + \lambda_i \cdot (i_t - i^*)^2 \quad (17)$$

zapisaną w postaci macierzowej następująco

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{1}{2} \cdot (c_t - c^*)^T \cdot W \cdot (c_t - c^*) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (K \cdot X_t - c^*)^T \cdot W \cdot (K \cdot X_t - c^*) \end{aligned} \quad (18)$$

w której $c_t = \begin{bmatrix} \pi_t - \mu \cdot \pi_{t-1} \\ y_t \\ i_t \end{bmatrix}$, $c^* = \begin{bmatrix} 0 \\ y^* \\ i^* \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

4.1. Odpornie optymalna reguła instrumentalna w modelu z inercją inflacji

Odpornie optymalna reguła instrumentalna jest rozwiązaniem następującego problemu optymalizacyjnego

$$\begin{cases} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot (K \cdot X_t - c^*)^T \cdot W \cdot (K \cdot X_t - c^*) \right\} \rightarrow \min \\ \hat{D} \cdot E_t z_{t+1} = \hat{\hat{A}} \cdot X_t + C \cdot s_t \end{cases} \quad (19)$$

Warunek pierwszego rzędu można zapisać w postaci macierzowej następująco

$$K^T \cdot W \cdot (K \cdot X_t - c^*) + \hat{A}^T \cdot \Lambda_t - \beta^{-1} \cdot \hat{D}^T \cdot \Lambda_{t-1} = \vec{0} \quad (20)$$

gdzie $\vec{0}$ jest wektorem zerowym. Warunek pierwszego rzędu można również zapisać w postaci następującego układu równań

$$\begin{cases} \pi_t - \mu \cdot \pi_{t-1} - \beta \cdot \mu \cdot E_t(\pi_{t+1} - \mu \cdot \pi_t) - \\ - \beta^{-1} \cdot \alpha \cdot \Lambda_{1,t-1} - \beta \cdot \mu \cdot \Lambda_{2,t+1} + (1 + \beta \cdot \mu) \cdot \Lambda_{2,t} - \Lambda_{2,t-1} = 0 \\ \lambda_y \cdot (y_t - y^*) + \Lambda_{1,t} - \beta^{-1} \cdot \Lambda_{1,t-1} - \gamma \cdot \Lambda_{2,t} = 0 \\ \lambda_i \cdot (i_t - i^*) + \alpha \cdot \Lambda_{1,t} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

prawdziwego dla każdego $t \geq 0$ z warunkami początkowymi postaci $\Lambda_{1,-1} = \Lambda_{2,-1} = 0$, $\pi_{-1} = \pi$.

Zatem optymalna stopa procentowa spełnia następujące równanie Eulera

$$A(L)(i_{t+1} - i^*) = -f_t \quad (22)$$

gdzie:

$A(L)$ jest wielomianem opóźnień trzeciego stopnia,

$$A(L) = \beta \cdot \mu - (\mu + 1 + \beta \cdot \mu) \cdot L + [1 + \mu + \frac{1+\gamma \cdot \alpha}{\beta}] \cdot L^2 - \frac{1}{\beta} \cdot L^3,$$

$\lambda_j = \frac{1}{L_j}$, $j=1, 2, 3$, L_1, L_2, L_3 są pierwiastkami wielomianu $A(L)$,

$$f_t = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\lambda_i} \cdot (\pi_t - \mu \cdot \pi_{t-1} + \frac{\lambda_y}{\gamma} \cdot \Delta y_t) - \beta \cdot \mu \cdot \frac{\gamma \cdot \alpha}{\lambda_i} \cdot [E_t(\pi_{t+1} - \mu \cdot \pi_t) + \frac{\lambda_y}{\gamma} \cdot E_t \Delta y_{t+1}].$$

Odpornie optymalną regułę instrumentalną i_t^{ZI} wyznaczoną na podstawie modelu z inercją inflacji, można zapisać w następującej postaci jawnej

$$\begin{aligned} i_t^{ZI} = & (1 - \rho_1) \cdot i^* + \rho_1 \cdot i_{t-1} + \rho_2 \cdot \Delta i_{t-1} + \varphi_\pi \cdot F_t(\pi) + \frac{\varphi_y}{4} \cdot F_t(y) - \\ & - \rho_\pi \cdot \pi_{t-1} - \frac{\rho_y}{4} \cdot y_{t-1} \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

$$\rho_1 = 1 + (\lambda_2 - 1) \cdot (1 - \lambda_1), \quad \rho_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2,$$

$$\varphi_\pi = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\lambda_i \cdot \beta} \cdot \frac{1 + \beta \cdot \mu^2 - \beta \cdot \mu - \lambda_3^{-1} \cdot \mu}{\lambda_3 \cdot \mu \cdot (1 - \lambda_3^{-1})},$$

$$\rho_\pi = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\lambda_i \cdot \beta \cdot \lambda_3}, \quad \varphi_y = \rho_y = \frac{4 \cdot \lambda_y \cdot \alpha}{\lambda_i \cdot \beta \cdot \mu \cdot \lambda_3}$$

$F_t(s)$ oznacza kombinację liniową wartości bieżącej i prognoz zmiennej s z wagami normalizowanymi do sumy 1, czyli

$$F_t(\pi) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{\pi j} E_t(\pi_{t+j}), \quad F_t(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{y j} E_t(y_{t+j})$$

oraz dla każdego $j \geq 1$

$$\alpha_{\pi j} = -\lambda_3^{-j+1} \cdot \beta \cdot \mu + \lambda_3^{-j} \cdot (1 + \beta \cdot \mu^2) - \lambda_3^{-j-1} \cdot \mu$$

czyli $\alpha_{\pi 0} = 1 + \beta \cdot \mu^2 - \lambda_3^{-1} \cdot \mu$

natomiast dla każdego

$$j \geq 1 \quad \alpha_{y j} = -\lambda_3^{-j+1} \cdot \beta \cdot \mu + \lambda_3^{-j} \cdot (1 + \beta \cdot \mu) - \lambda_3^{-j-1}$$

przy czym $\alpha_{y 0} = 1 + \beta \cdot \mu - \lambda_3^{-1}$.

5. Analiza empiryczna

W analizach wzięto pod uwagę dane miesięczne dotyczące wskaźnika inflacji, dynamiki produkcji przemysłowej, jak również wysokość stopy referencyjnej na koniec danego miesiąca. Produkcję potencjalną wyznaczono na podstawie filtra HP. Analizę przeprowadzono dla okresu styczeń 2004-marzec 2012.

Dla modelu strukturalnego Woodforda z inercją inflacji stwierdzono, że wielomian opóźnień ma trzy pierwiastki rzeczywiste, które wyznaczono na podstawie wzorów Cardana otrzymując $L_1 = 1,06$, $L_2 = 0,88$, $L_3 = 0,4$. Zatem $\lambda_1 = 0,94$, $\lambda_2 = 1,14$, $\lambda_3 = 2,5$.

W tabeli 1 zestawiono optymalne wysokości stopy procentowej w okresie marzec 2004-czerwiec 2012, obliczone ze wzorów na odpornie optymalne reguły instrumentalne polityki pieniężnej wyprowadzone na podstawie modelu strukturalnego Woodforda nieuwzględniającego inercji inflacji oraz modelu z inercją inflacji. Aby ocenić efektywność wyznaczonych optymalnych wysokości stopy procentowej, w tabeli 1 ujęto również rzeczywiste wartości stopy referencyjnej.

Tabela 1

Wysokości stóp procentowych: optymalnych i rzeczywistej

Okres t	Optymalna stopa procentowa wyznaczona na podstawie modelu nieuwzględniającego inercji inflacji i_t^{BI}	Optymalna stopa procentowa wyznaczona na podstawie modelu z inercją inflacji i_t^{ZI}	Rzeczywista stopa procentowa i_t
1	2	3	4
mar 04	5,26	5,27	5,25
kwi 04	5,25	5,27	5,25
maj 04	5,24	5,22	5,25
cze 04	5,27	5,30	5,25
lip 04	5,23	5,20	6
sie 04	5,26	5,25	6,5
wrz 04	5,99	5,98	6,5
paź 04	6,49	6,48	6,5
lis 04	6,52	6,56	6,5
gru 04	6,49	6,50	6,5
sty 05	6,50	6,52	6,5
lut 05	6,50	6,53	6,5
mar 05	6,49	6,49	6
kwi 05	6,51	6,56	5,5
maj 05	6,00	6,03	5,5
cze 05	5,51	5,54	5
lip 05	5,50	5,51	4,75
sie 05	5,01	5,03	4,75
wrz 05	4,75	4,75	4,5
paź 05	4,75	4,77	4,5
lis 05	4,50	4,50	4,5
gru 05	4,50	4,50	4,5
sty 06	4,50	4,50	4,5
lut 06	4,50	4,48	4,25
mar 06	4,52	4,56	4
kwi 06	4,23	4,19	4
maj 06	4,03	4,06	4
cze 06	3,98	3,96	4
lip 06	4,01	4,01	4
sie 06	4,00	3,99	4
wrz 06	4,00	3,98	4
paź 06	4,01	4,01	4
lis 06	4,00	4,00	4
gru 06	3,99	3,95	4

cd. tabeli 1

1	2	3	4
sty 07	4,02	4,04	4
lut 07	3,99	3,98	4
mar 07	4,00	3,99	4
kwi 07	4,01	4,01	4,25
maj 07	3,99	3,97	4,25
cze 07	4,25	4,23	4,5
lip 07	4,26	4,25	4,5
sie 07	4,50	4,50	4,75
wrz 07	4,49	4,46	4,75
paź 07	4,76	4,78	4,75
lis 07	4,74	4,75	5
gru 07	4,74	4,72	5
sty 08	5,00	5,01	5,25
lut 08	5,01	5,03	5,5
mar 08	5,22	5,15	5,75
kwi 08	5,53	5,58	5,75
maj 08	5,72	5,69	5,75
cze 08	5,77	5,79	6
lip 08	5,75	5,76	6
sie 08	5,98	5,95	6
wrz 08	6,02	6,07	6
paź 08	5,99	6,00	6
lis 08	5,99	5,98	5,75
gru 08	6,02	6,08	5
sty 09	5,74	5,77	4,25
lut 09	5,01	5,03	4
mar 09	4,28	4,33	3,75
kwi 09	3,98	3,95	3,75
maj 09	3,77	3,77	3,75
cze 09	3,75	3,74	3,5
lip 09	3,75	3,75	3,5
sie 09	3,51	3,51	3,5
wrz 09	3,50	3,48	3,5
paź 09	3,49	3,46	3,5
lis 09	3,52	3,53	3,5
gru 09	3,49	3,47	3,5
sty 10	3,50	3,49	3,5
lut 10	3,50	3,48	3,5
mar 10	3,51	3,51	3,5
kwi 10	3,49	3,47	3,5
maj 10	3,51	3,50	3,5

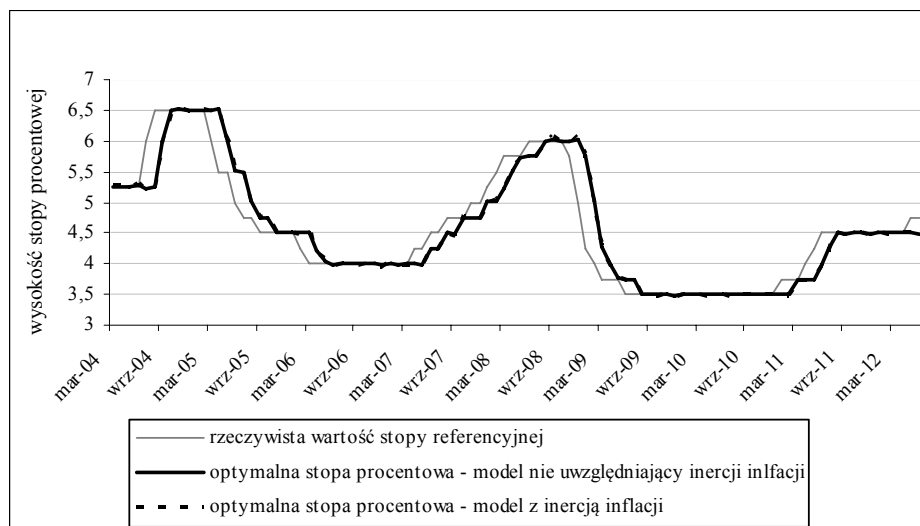
cd. tabeli 1

1	2	3	4
cze 10	3,50	3,50	3,5
lip 10	3,49	3,47	3,5
sie 10	3,51	3,51	3,5
wrz 10	3,50	3,49	3,5
paź 10	3,50	3,48	3,5
lis 10	3,50	3,50	3,5
gru 10	3,50	3,50	3,5
sty 11	3,50	3,48	3,75
lut 11	3,50	3,49	3,75
mar 11	3,75	3,73	3,75
kwi 11	3,75	3,74	4
maj 11	3,75	3,75	4,25
cze 11	3,99	3,96	4,5
lip 11	4,25	4,22	4,5
sie 11	4,51	4,52	4,5
wrz 11	4,50	4,50	4,5
paź 11	4,50	4,49	4,5
lis 11	4,50	4,51	4,5
gru 11	4,50	4,49	4,5
sty 12	4,51	4,51	4,5
lut 12	4,50	4,50	4,5
mar 12	4,50	4,49	4,5
kwi 12	4,50	4,50	4,5
maj 12	4,50	4,51	4,75
cze 12	4,49	4,46	4,75

Można zauważyć dużą dokładność optymalnych wartości stopy procentowej wyznaczonych na podstawie odpornie optymalnej reguły instrumentalnej polityki pieniężnej w porównaniu z wartościami rzeczywistymi stopy referencyjnej. Ponadto, wystąpiło niewielkie (kilkuokresowe) przesunięcie wykresów optymalnych stóp referencyjnych w stosunku do wykresu rzeczywistej stopy referencyjnej. Spostrzeżenia te wynikają również z prezentacji wyników zawartych w tabeli 1, dotyczących optymalnych i rzeczywistych wartości stopy procentowej na poniższym wykresie.

Wykres 1

Wysokości stóp procentowych optymalnych i rzeczywistych



Ponadto, na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że występują niewielkie różnice w wyznaczonych optymalnych stopach procentowych, gdy w rozważaniach wzięto pod uwagę wybrany model strukturalny nieuwzględniający inercji inflacji w porównaniu z wartościami stopy procentowej, gdy uwzględniono inercję inflacji. Zatem z przeprowadzonych analiz można wyciągnąć wnioski, że uwzględnienie inercji inflacji nie ma istotnego znaczenia dla wysokości optymalnej stopy procentowej. W przeprowadzonej analizie empirycznej uzyskano dużą wartość wagi bliską jeden dla wartości bieżącej w kombinacjach liniowych wartości bieżącej i prognoz inflacji i luki produkcyjnej, natomiast małe wagi dla prognoz tych zmiennych.

Nieznacznie lepsze wyniki uzyskano na podstawie modelu nieuwzględniającego inercji inflacji.

Podsumowanie

Na podstawie zaprezentowanych wzorów na optymalne wartości stopy procentowej można stwierdzić, że jeżeli przy podejmowaniu decyzji nie uwzględniamy inercji zmiennych w przedstawionym modelu inercji inflacji, to optymalne decyzje dotyczące wysokości instrumentu polityki pieniężnej nie

uwzględniają prognoz zmiennych celu. Jeżeli w procesie podejmowania decyzji uwzględnia się inercję zmiennych celu, to w optymalnych decyzjach są brane pod uwagę prognozy zmiennych celu. Im horyzont prognoz zmiennych celu jest większy, tym waga z jaką wpływają one na wysokość instrumentu polityki pieniężnej jest mniejsza. Optymalny horyzont prognozy zmiennych celu jest zbliżony z długością opóźnienia mechanizmu transmisji monetarnej. Jednak z przeprowadzonej analizy empirycznej dla danych miesięcznych dla Polski z okresu styczeń 2004-marzec 2012 stwierdzono, że waga przy wartości bieżącej w kombinacjach liniowych wartości bieżącej i prognoz inflacji i luki produkcyjnej przyjmuje dużą wartość, bliską jeden, natomiast wagi przy prognozach tych zmiennych przyjmują małe wartości, czyli prognozy inflacji i luki produkcyjnej nie wpływają w znaczący sposób na wartości optymalne stopy procentowej.

Literatura

- Fuhrer J.C.: The Persistence of Inflation and the Cost of Disinflation. „New England Economic Review” 1995, January/February.
- Giannoni M.P., Woodford M.: Optimal Interest-Rate Rules: I. General Theory. NBER Working Paper No. W9419, January 2003.
- Giannoni M.P., Woodford M.: Optimal Interest-Rate Rules: II. Application. NBER Working Paper No. W9420, January 2003.
- Rudebusch G.D., Svensson L.E.O.: Policy Rule for Inflation Targeting. Working Paper Series, National Bureau of Economic Research Cambridge 1998.

ROLE OF INFLATION INERTIA IN OPTIMAL DECISION MAKING

Summary

In this paper we present two variants of chosen structural model – Woodford model: the model not taking into consideration inflation inertia and model with inflation inertia.

On the ground of these two variants of models we determine the robustly optimal instrument rules. We use these rules for estimation of role of inflation inertia in optimal monetary decision making.

Włodzimierz Rembisz

Agata Sielska

Instytut Ekonomiki Rolnictwa i Gospodarki Żywnościowej – Państwowy Instytut Badawczy
(IERiGŻ-PIB) w Warszawie

RYZIKO I CENOWA ELASTYCZNOŚĆ PODAŻY PRODUKCJI ROLNICZEJ

Wprowadzenie

Producenci rolni prowadzą działalność na rynku, który w dużej mierze spełnia warunki równowagi konkurencyjnej. Dla każdego z producentów cena otrzymywana jest zmienną egzogeniczną. Jej poziom oraz zmienność pozostają poza wpływem indywidualnego producenta, zaś zbiór producentów, zarówno w skali regionalnej, jak i krajowej, reaguje na tę zmienność w podobny sposób. Z punktu widzenia optymalnych zachowań indywidualnego producenta rolnego powinien on dostosować swoje koszty do ceny, jednak ze względu na występowanie interwencji rynkowej zasada ta nie zawsze jest spełniona. W ujęciu ogólnym poziom, zmienność i wahania cen produktów rolnych są uwarunkowane koniunkturalnie, sezonowo oraz podlegają wpływom polityki rolnej.

W pracy podjęto problem reakcji producentów rolnych na zmiany cen skupu. Wysokość cen przy danych kosztach przesądza o realizacji funkcji celu producenta, stanowiąc tym samym ważny czynnik wpływający na decyzje podejmowane w gospodarstwach rolnych. Kwestie elastyczności podaży oraz elastyczności dochodów producentów rolnych na zmiany cen pozostają niezależne od sposobu stanowienia cen. W rolnictwie de facto są one wypadkową mechanizmu rynkowego oraz działań polityki rolnej, głównie w zakresie interwencjonizmu. Z uwagi na dominujące znaczenie płatności bezpośrednich coraz większą rolę odgrywa obecnie mechanizm rynkowy. Niemniej jednak istnieje wiele mechanizmów interwencji rynkowej w pierwszym filarze Wspólnej Polityki Rolnej, oddziałujących na poziom cen skupu, wśród których wymienić można m.in. kwotowanie produkcji mleka, wsparcie eksportu i regulacje rynku cukru. Z tego względu ujęcie to pozwala w pośredni sposób przewidywać także

reakcje producentów na zmiany zachodzące w polityce rolnej. Przedstawione w pracy rozważania odnoszą się do krótkiego okresu (danego cyklu produkcyjno-handlowego)¹.

Praca składa się z czterech części. W pierwszej przedstawiono rolę zmienności cen w gospodarstwie rolnym. Następnie zaprezentowano jedną z metod modelowania decyzji produkcyjnych. W trzeciej części omówione zostały metody wykorzystane w celu zbadania elastyczności dochodów oraz podaży producentów rolnych. Ostatnią część przeznaczono na zamieszczenie i skomentowanie uzyskanych wyników.

1. Zmienność cen jako źródło ryzyka w gospodarstwie rolnym

W rolnictwie szczególnie istotnym źródłem ryzyka² jest niepewność cenowa. Ze względu na opóźnienie czasowe występujące między podjęciem decyzji produkcyjnej a uzyskaniem produktu, ceny produktów nie są znane na początku procesu decyzyjnego mimo pewnych regularności, którym podlegają ich sezonowe wahania. Zmienność cen produktów rolnych związana jest ze specyfiką rynku rolnego³. Moschini i inni⁴ zwracają uwagę na fakt, iż takie cechy rynku, jak homogeniczny produkt, nieelastyczny popyt, duża liczba producentów mogą odpowiadać za nieantycypowane zmienności cen. Można zauważyć, że ryzyko związane jest nie tylko z cenami otrzymywanymi, ale również z cenami płaconymi za nakłady, co określa się zmiennością nożyc cen.

Istotne źródło niepewności stanowi również otoczenie instytucjonalne, zwłaszcza polityka rolna poprzez swoje instrumenty interwencyjne. Może ona wywierać wpływ na decyzje podejmowane przez producentów przez modyfi-

¹ W krótkim okresie nie są możliwe zmiany technologiczne i wynikająca z nich poprawa efektywności.

² Ryzyko w produkcji rolniczej wynika z występowania czynników losowych, mogących oddziaływać na wielkość produktu wytwarzanego przy danej technologii. Jest to potęgowane przez wykorzystywanie w działalności procesów biologicznych. Zarówno w przypadku produkcji roślinnej, jak i zwierzęcej procesy wzrostu obciążone są pewną niepewnością, co wynika z wrażliwości na warunki pogodowe, zagrożenia dla zdrowotności itd., oddziałujących na jakość i ilość wytwarzanej produkcji. Literatura dotycząca ryzyka produkcyjnego związanego z charakterem produkcji rolniczej, zwłaszcza roślinnej jest rozległa. G. Moschini, D.A. Hennessy: Uncertainty, Risk Aversion, and Risk Management for Agricultural Producers. In: Handbook of Agricultural Economics, Volume 1A Agricultural Production. Ed. B.L. Gardner, G.C. Rausser. Elsevier Science, Amsterdam 2001.

³ W. Rembisz: Kwestie ryzyka, cen, rynku, interwencji i stabilnością dochodów w rolnictwie. Vizja Press&IT, Warszawa 2012.

⁴ G. Moschini, D.A. Hennessy: Op. cit.

kację źródeł dochodów, sposobów maksymalizacji funkcji celu oraz przez wprowadzanie zmian w warunkach ograniczających⁵. Niektórzy autorzy⁶ uwzględniają również ryzyko „rodzinne”, związane z możliwością pracy członków gospodarstwa domowego powiązanego z gospodarstwem rolnym.

Mimo iż wskazane źródła ryzyka oraz reakcje producentów na zachodzące zmiany wiążą się również z indywidualnymi cechami decydenta, w tym wypadku prowadzącego gospodarstwo rolne (m.in. awersją do ryzyka), znaczna część badań oraz modeli scenariuszowych wykorzystywanych do symulacji skutków zmian wprowadzanych na rynku lub w sferze regulacyjnej nie uwzględnia tego aspektu, podobnie jak ryzyka indywidualnego związanego ze stopniem kompetencji itp.⁷.

W literaturze przedmiotu za jeden z głównych problemów rolnictwa uznaje się niestabilność i zmienność cen otrzymywanych⁸.

2. Problem decyzyjny producentów rolnych

2.1. Modelowanie decyzji producenta rolnego

W celu zbadania i określenia reakcji indywidualnego producenta rolnego na zmiany cen skupu określono prosty model decyzyjny.

Modelowanie podejmowania decyzji w gospodarstwach rolnych w przedstawionym ujęciu polega na ustaleniu tzw. planu na dany okres produkcyjny, uwzględniającego wykorzystanie posiadanych czynników produkcji zgodnie z ustaloną funkcją celu. Zazwyczaj stosuje się modele optymalizacji liniowej postaci (1).

⁵ A. Bezat-Jarzębowska, W. Rembisz, A. Sielska: Wybór polityki i jej wpływ na decyzje producentów rolnych w ujęciu analitycznym z elementami weryfikacji empirycznej. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2013.

⁶ H. Aimin: Uncertainty, Risk Aversion and Risk Management in Agriculture. „Agriculture and Agricultural Science Procedia” 2010, No. 1, s. 152-156.

⁷ Pewną zmianą są pod tym względem modele agentowe, które umożliwiają indywidualizację charakterystyk decydentów, m.in. pod kątem umiejętności zarządczych, patrz m.in. model AgriPoliS: K. Kellermann, K. Happe, C. Sahrbacher, A. Balmann, M. Brady, H. Schnicke, A. Osuch: AgriPoliS 2.1 – Model Documentation. IAMO, 2008.

⁸ D.H. Constance, J.L. Gilles, W.D. Heffernan: Agrarian Policies and Agricultural Systems in the United States. In: Agrarian Policies and Agricultural Systems. Ed. A. Bonanno. Westview Press, Boulder, Colorado 1990, za: E. McCann, S. Sullivan, D. Erickson, R. De Young: Environmental Awareness, Economic Orientation, and Farming Practices: A Comparison of Organic and Conventional Farmers. „Environmental Management” 1997, No. 5, s. 747-758.

$$c^T x \rightarrow \max \quad (1)$$

p.w.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

gdzie:

x – wektor rozmiarów działalności,

c – wektor współczynników funkcji celu,

A – macierz współczynników techniczno-ekonomicznych, charakteryzujących procesy wytwórcze,

b – wektor ograniczeń wynikających z dostępnych zasobów oraz względów agrotechnicznych.

W wielu modelach scenariuszowych stosowanych w celu oceny wpływu zmian zachodzących w otoczeniu (zarówno będących efektem polityki rolnej, jak i zmian cen wynikających z działania sił rynkowych) na wybory gospodarstw rolnych wykorzystuje się podobne modele optymalizacji liniowej⁹.

Wszystkie egzogeniczne zmienne zadania (1) charakteryzują się niepewnością, a przyjmowanie ich wartości jako ustalonych prowadzić może, jak wskazuje się w literaturze, do tworzenia planów, które mogą zwiększać ryzyko dla gospodarstwa rolnego¹⁰. Stosowane podejścia i modyfikacje podstawowego modelu optymalizacji liniowej wywodzą się z teorii gier¹¹, metod safety first¹² lub opierają się na metodach Markowitza¹³ lub Roya¹⁴. Związane jest to z wy-

⁹ Jako przykład przywołać można pracę: S. Czekaj, E. Majewski, A. Wąs: Koncepcja oszacowania skutków reform Wspólnej Polityki Rolnej Unii Europejskiej (WPR) w perspektywie budżetowej 2014-2020. W: Dopłaty bezpośrednie i dotacje budżetowe a finanse oraz funkcjonowanie gospodarstw i przedsiębiorstw rolniczych. Red. J. Kulawik. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2011.

¹⁰ S. Gędek: Optymalizacja planów rocznych rodzinnego gospodarstwa rolnego. SGGW, Warszawa 2009, s. 87.

¹¹ J.P. McInerney: Game Theoretic Procedures in Relation to Farm Management Decisions. Iowa State University, Ames 1964 (niepublikowane) za: S. Gędek: Op. cit.

¹² J.A. Atwood, M.J. Watts, G.A. Helmers, L.J. Held: Incorporating Safety First Constraints in Linear Programming Production Models. „Western Journal of Agricultural Economics” 1988, No. 01, s. 29-36.

¹³ P.B.R. Hazell: A Linear Alternative to Quadratic and Semivariance Programming for Farm Planning under Uncertainty. „American Journal of Agricultural Economics” 1970, Vol. 53, s. 53-62; J.E. Trinidad Segovia, S. Cruz Rambaud, C.B. García García: A Model for Determining Efficient Portfolio Cropping Plans in Organic Farming. „Spanish Journal of Agricultural Research” 2005, No. 2, s. 159-167.

¹⁴ J.E. Trinidad Segovia, S. Cruz Rambaud, C.B. García García: Op. cit.

mogiem przyjęcia pewnych możliwych realizacji zmiennych losowych, będących elementami wektorów $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ lub macierzy $\mathbf{A}$ oraz odpowiadających im prawdopodobieństw. Podejście takie bywa przedmiotem dyskusji ze względu na konieczność przyjęcia pośrednio założenia o skończonej liczbie stanów natury.

Ze względu na ograniczone rozmiary niniejszej pracy uwagę skoncentrowano na niepewności wynikającej ze zmienności cen produktów rolnych (cen otrzymywanych) i reakcjach producentów rolnych na te zmiany przy założeniu *ceteris paribus*. Zasoby oraz elementy macierzy technologicznej przyjęto na stałym poziomie.

2.2. Ryzyko w funkcji celu

Funkcja celu w modelu (1) jest zwykle funkcją jednokryterialną, a w literaturze przedmiotu jako cel producenta rolnego przyjmuje się zazwyczaj osiągnięcie maksymalnej wysokości dochodu lub zysku¹⁵. To podejście, utożsamiające gospodarstwo rolne z mikroekonomiczną kategorią producenta, nie jest powszechnie akceptowane ze względu na zasadność uwzględnienia innych oprócz zysku celów lub kryteriów decyzyjnych, najczęściej wywodzonych ze związku między gospodarstwem rodzinnym i gospodarstwem rolnym¹⁶. Nie negując istnienia alternatywnych celów można jednak zauważyć, że powiązanie funkcji celu z dochodem stwarza podstawy dla funkcjonowania i rozwoju producenta rolnego¹⁷.

Zakładając, że funkcją celu producenta rolnego pozostaje maksymalizacja dochodu, można zapisać¹⁸

$$E(D) = E(C_R) \cdot Z^\circ \cdot E(h) - C_K \cdot K - C_L \cdot L \quad (2)$$

gdzie:

$E(D)$ – funkcja spodziewanego dochodu,

$E(C_R)$ – spodziewana cena produktów rolnych,

Z° – powierzchnia wykorzystywanych użytków rolnych,

¹⁵ W. Rembisz: Mikroekonomiczne podstawy wzrostu dochodu producentów rolnych. Vizja Press&IT, Warszawa 2007.

¹⁶ P.B.R. Hazell, R.D. Norton: Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture. Macmillan Publishing Company, New York 1986; A. Sielska: Decyzje producentów rolnych w ujęciu wielokryterialnym – zarys problem. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2012.

¹⁷ W tradycji ekonomiki rolnictwa rolnego producent rolny stanowi kategorię łączącą gospodarstwo domowe i gospodarstwo rolne jako warsztat produkcyjny. Obecnie ten związek ulega coraz większemu osłabieniu.

¹⁸ W. Rembisz: Mikroekonomiczne..., op. cit.

$E(h)$ – prawdopodobna produkcja z jednego hektara użytków rolnych,

C_K – cena nakładów czynnika kapitałowego,

C_L – wynagrodzenie czynnika pracy (określone z góry na zasadzie wskaźnika parytetowego),

K, L – wielkości zaangażowania czynników odpowiednio kapitału i pracy.

Po odpowiednich przekształceniach, przy założeniu, że producent maksymalizuje funkcję (2) przy stałym areale, otrzymuje się funkcję podaży rolnej, w której parametrami są nie tylko zmienne związane z procesami wytwórczymi (m.in. nakłady czynników produkcji, jakość środowiska naturalnego), ale również zmiany cen otrzymywanych.

3. Badanie eksperymentalne

Przeprowadzenie weryfikacji empirycznej w przypadku zaprezentowanego wyżej podejścia jest zadaniem trudnym. Zwykle przedmiotem badań są cenowe elastyczności podaży wybranych produktów.

3.1. Źródła danych

Ilustrację empiryczną oparto na danych pochodzących z bazy FADN¹⁹. Ze względu na ochronę danych indywidualnych gospodarstw rolnych w pracy prezentowane są uśrednione wyniki uzyskane dla 50 losowo wybranych obiektów z grupy gospodarstw specjalizujących się w uprawach polowych. Dane dotyczące charakterystyk gospodarstw uzupełnione zostały oszacowanymi wielkościami plonów oraz parametrami zapotrzebowania na nakłady, pochodzącymi z rachunków symulacyjnych²⁰. Mimo iż bardziej aktualne prognozy pozostają dostępne, nie zostały uwzględnione w niniejszej pracy z dwóch powodów: zawierają wartości parametrów dla mniejszej liczby ewentualnych działalności produkcyjnych, nie uwzględniają również nakładów pracy koniecznych dla wytworzenia danej produkcji, co w istotnym stopniu zubożałoby niniejszą analizę.

¹⁹ Farm Accountancy Data Network – System Zbierania i Wykorzystywania Danych Rachunkowych z Gospodarstw Rolnych według standardów i procedur UE prowadzony w IERiGŻ-PIB.

²⁰ Oszacowania zaczerpnięto z pracy: Produkcja, koszty i dochody z wybranych produktów rolniczych w latach 2010-2011 (wyniki rachunku symulacyjnego). Red. I. Augustyńska-Grzymek. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2012.

3.2. Optymalizacja planu

Wybór produkcyjny (decyzja o planowanych działaniach) musi zostać dokonany do pewnego momentu. W pracy zakłada się, że decyzje dotyczące wszystkich działalności produkcyjnych podejmowane są jednocześnie. Jest to pewne uproszczenie, jednak wobec faktu, iż poszczególne działalności są od siebie wzajemnie współzależne – co wynika z organiczności gospodarowania w rolnictwie – wydaje się, iż jest to uzasadnione. Ze względu na wciąż istotną rolę interwencji na rynkach rolnych zakłada się również, że ceny poza czynnikami rynkowymi wynikać mogą także z oddziaływania czynników instytucjonalnych związanych z prowadzoną polityką rolną. Z tego powodu w pracy uwzględniono również analizę z dopłatami.

W wektorze możliwych działalności produkcyjnych uwzględniono uprawy 6 roślin. Wybór dokonany został na podstawie kryterium dostępności danych dotyczących oczekiwanych wymaganych nakładów na 1 ha oraz oczekiwanych plonów i cen, jak również cen historycznych. Zmienne decyzyjne powiązane z tymi działalnościami są następujące:

- x_1 – powierzchnia uprawy jęczmienia jarego,
- x_2 – powierzchnia uprawy żyta ozimego,
- x_3 – powierzchnia uprawy pszenicy ozimej,
- x_4 – powierzchnia uprawy buraków cukrowych,
- x_5 – powierzchnia uprawy rzepaku ozimego,
- x_6 – powierzchnia uprawy ziemniaków jadalnych.

Model optymalizacji liniowej jest postaci

$$(c_G^E \times p_G + c_P^E \times p_P - k)^T x \rightarrow \max \quad (3)$$

p.w.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 x_i &\leq Z \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 0,6 \cdot Z \\ x_4 + x_5 &\leq 0,25 \cdot Z \\ l^T x &\leq L \\ k^T x &\leq F \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

gdzie:

x – wektor rozmiarów działalności,

p_G – wektor plonów głównych z 1 ha,

p_P – wektor plonów pobocznych²¹ z 1 ha,

c_G^E – wektor oczekiwanych cen głównych produktów rolnych,

c_P^E – wektor oczekiwanych cen pobocznych produktów rolnych,

$\times$ – iloczyn Hadamarda,

Z – dostępny areal gruntów rolnych,

L – dostępny godzinowy zasób czynnika pracy,

l – wektor wymaganych nakładów pracy (w godzinach),

k – wektor wymaganych nakładów finansowych na 1 ha,

F – ograniczenie kosztowe.

Drugi i trzeci warunek ograniczający przyjęto ze względów agrotechnicznych. Jako ograniczenie kosztowe dla każdego gospodarstwa indywidualnie przyjęto wysokość kosztów ogółem poniesionych na prowadzenie działalności, zaś jako dostępny zasób godzinowy czynnika pracy – liczbę faktycznie pracowanych godzin. W kosztach produkcji uwzględniono godzinowy koszt zaangażowania własnych nakładów czynnika pracy, zaczerpnięty z wyników rachunków symulacyjnych, podobnie jak wartości plonów głównych oraz pobocznych z 1 ha, koszty poszczególnych działalności w przeliczeniu na 1 ha, prognozowane ceny głównych i pobocznych produktów rolnych oraz prognozy wysokości dopłat²².

3.3. Zmienność cen

Za podstawę przyjęto cenę pochodzącą z prognoz wykonanych przez FADN. Ze względu na niewielkie znaczenie cen pobocznych produktów rolnych w porównaniu do cen produktów głównych, nie uwzględniano ich wahań przyjmując, że realizacje kształtują się na poziomie prognozowanym w badaniach symulacyjnych. Założono, że producenci rolni prognozują ceny opierając się na doświadczeniu, danych historycznych oraz wiedzy lub poglądach dotyczących ich kształtowania się w przyszłości. Zakłada się, że prognozy nie są zróżnico-

²¹ Pobocznymi produktami rolnymi są produkty nieprzeznaczone do produkcji żywności.

²² Ibid.

wane między gospodarstwami. Następnie na podstawie analizy historycznej zmienności cen skonstruowano przedziały, w których może zawierać się prognoza dokonana przez producenta rolnego

$$c_{Gi}^{E*} - S_{c_{Gi}} \leq c_{Gi}^E \leq c_{Gi}^{E*} + S_{c_{Gi}} \quad (4)$$

gdzie:

c_{Gi}^{E*} – cena i -tego produktu rolnego prognozowana przez FADN,

c_{Gi}^E – przewidywana przez decydenta cena i -tego produktu rolnego,

$S_{c_{Gi}}$ – odchylenie standardowe ceny i -tego produktu rolnego wyznaczone na podstawie danych historycznych.

W ten sposób uzyskano przedział uwzględniający dotychczasową zmienność ceny. Do wyznaczenia przedziałów (4) wykorzystano szeregi czasowe GUS. Zastosowane podejście wynikało z niedostępności odpowiednich szeregów czasowych dla indywidualnych producentów rolnych. Dla cen zawierających się w przedziałach określonych wzorem (4) wyznaczono plany producentów rolnych oraz zbadano, jakie zmiany podaży produktów rolnych i dochodów decydentów byłyby efektem jednocentowych zmian cen. W momencie zbioru podaży producenta rolnego jest już oczywiście wielkością zrealizowaną. Przewodzona symulacja ma na celu odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób decyzje producentów zmieniłyby się w przypadku, w którym dysponowaliby oni wiedzą o jednocentowym wzroście ceny. W rzeczywistości podaż producenta rolnego, będąca wynikiem jego decyzji, w pewnym zakresie pozostaje poza jego wpływem po wdrożeniu planu produkcyjnego. Istotniejszą kwestią wydaje się zatem być zmienność dochodów wynikająca ze zmian ceny.

Zgodnie z istotą równowagi konkurencyjnej przyjęto założenie, że podaż indywidualnego producenta nie wywiera wpływu na cenę otrzymywaną, która jest dana egzogenicznie. Indywidualny producent nie ma wpływu na podaż konkurencji, jednakże sumaryczna podaż wpływa na cenę, a tym samym na dochody indywidualnych gospodarstw. Symulacji zmian ceny (wrażliwości cen) pod wpływem zmian podaży grupy producentów rolnych nie przeprowadzono ze względu na niedostateczny zasób danych. Wydaje się jednak, że można uznać, iż symulacje zmian ceny w przedziałach określonych wzorem (4) mogą spełniać podobną rolę. W pracy zamieszczono także wyniki wpływu zmian ceny na dochód, co można uznać za ostateczny rezultat reakcji podaży na te zmiany.

3.4. Modele planów gospodarstw rolnych

W pracy wykorzystano trzy modele optymalizacyjne. Pierwszym jest model postaci (3) (oznaczany dalej przez M1D w przypadku analizy z uwzględnieniem dopłat oraz M1, jeśli dopłaty nie były brane pod uwagę). Drugi zastosowany model dany jest postaci

$$(c_G^E \times p_G + c_P^E \times p_P - k)^T x \rightarrow \max \quad (5)$$

p.w.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 x_i &\leq Z \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 0,6 \cdot Z \\ x_4 + x_5 &\leq 0,25 \cdot Z \\ \forall_i (c_{Gi^*}^E p_{Gi^*} + c_{Pi^*}^E p_{Pi^*}) x_{i^*} &\geq (c_{Gi}^E p_{Gi} + c_{Pi}^E p_{Pi}) x_i \\ \forall_{i \neq i^*} (c_{Gi^{**}}^E p_{Gi^{**}} + c_{Pi^{**}}^E p_{Pi^{**}}) x_{i^{**}} &\geq (c_{Gi}^E p_{Gi} + c_{Pi}^E p_{Pi}) x_i \\ l^T x &\leq L \\ k^T x &\leq F \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

gdzie:

i^* – oznacza uprawę o największym udziale w przychodach,

i^{**} – oznacza uprawę o drugim pod względem wielkości udziale w przychodach.

Wprowadzona w powyższy sposób modyfikacja modelu (3) umożliwia uwzględnienie preferencji (wynikających z dotychczasowego doświadczenia) lub możliwości (związanych z warunkami wytwarzania lub zbytu) indywidualnych producentów rolnych. Dla analiz, w których brano pod uwagę dopłaty oraz bez ich uwzględniania przyjęto odpowiednio oznaczenia M2D oraz M2.

Ostatni z wykorzystanych modeli, oznaczany w dalszej części tekstu przez M3D oraz M3 (odpowiednio w wariancie z dopłatami oraz bez nich) jest postaci

$$(c_G^E \times p_G + c_P^E \times p_P - k)^T x \rightarrow \max \quad (6)$$

p.w.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 x_i &\leq Z \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 0,6 \cdot Z \\ x_4 + x_5 &\leq 0,25 \cdot Z \\ \forall_r (c_G^{Er} \times p_G + c_P^E \times p_P)^T x &\geq 2k^T x \\ l^T x &\leq L \\ k^T x &\leq F \end{aligned}$$

gdzie:

c_G^{Er} – oznacza r -tą realizację wektora cen.

W przypadku modeli M1 i M2, zadania optymalizacyjne rozwiązywane były indywidualnie dla każdego gospodarstwa. Dla modelu M3 na podstawie dostępnych danych skonstruowano zadanie dla „typowego” gospodarstwa rolnego z danej próby.

4. Wyniki badania eksperymentalnego

W tabeli 1 przedstawiono średnie elastyczności dochodu w kolejnych de-cylach cen głównych produktów rolnych z przedziałów określonych wzorem (4). W większości przypadków elastyczności wzrastają wraz ze wzrostem ceny, a reakcja dochodu na zmiany cen jest mniej niż proporcjonalna. W szczególności można zauważyć, że zmiany cen c_{G2} i c_{G6} nie wywierają wpływu na dochód w przypadku modelu M3, zaś dla pozostałych modeli wpływ zmian c_{G2} jest relatywnie słaby (we wszystkich przypadkach fakt uwzględnienia dopłat w analizie nie zmienia uzyskanych wniosków). Można zaobserwować także, że dla modelu M1D ceną, której zmiany nie wywierają wpływu na dochód, jest c_{G5} . Elastyczności uzyskane dla upraw należących do tej samej grupy (zboża) kształtują się odmiennie. W przypadku wyników dla modeli M1 oraz M1D, przedstawiających średnie elastyczności dla badanych gospodarstw, reakcja dochodu na zmiany cen jest słabsza w wariancie, w którym uwzględniono dopłaty. Jest to zgodne z założeniem, że dopłaty zmniejszają wpływ rynku i efektywności na dochody²³. Przyjęcie dodatkowych kryteriów (w podejściu M2 oraz M3) nie prowadzi jednak do potwierdzenia tych wniosków.

²³ A. Bezat-Jarzębowska, W. Rembisz, A. Sielska: Op. cit.

Średnie elastyczności dochodu dla kolejnych decyli cen z przedziałów określonych wzorem (4)

[illegible]

cd. tabeli 1

1	2	3	4									
M3D												
c_{G1}	1,06	1,58	1,12	1,11	1,19	1,09	1,08	1,08	1,07	1,07	1,06	1,06
c_{G2}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
c_{G3}	0,00	0,69	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,46
c_{G4}	0,00	0,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11
c_{G5}	0,33	0,48	0,34	0,36	0,38	0,39	0,41	0,42	0,44	0,45	0,46	0,48
c_{G6}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 2

Mediany cenowej elastyczności podaży (%) produktów rolnych

	$p_{G1} \cdot x_1$	$p_{G2} \cdot x_2$	$p_{G3} \cdot x_3$	$p_{G4} \cdot x_4$	$p_{G5} \cdot x_5$	$p_{G6} \cdot x_6$
1	2	3	4	5	6	7
M1						
c_{G1}	0,00		0,00			0,00
c_{G2}	0,00	0,00	0,00			0,00
c_{G3}	0,00		0,00			0,00
c_{G4}	0,00		0,00	-100,00	0,00	0,00
c_{G5}	0,00		0,00			0,00
c_{G6}	0,00		0,00			0,00
M1D						
c_{G1}	0,00		0,00			0,00
c_{G2}	0,00	0,00	0,00			0,00
c_{G3}	0,00		0,00			0,00
c_{G4}	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00
c_{G5}	0,00		0,00			0,00
c_{G6}	0,00		0,00			0,00
M2						
c_{G1}	-0,99		0,00	-50,00	0,00	0,00
c_{G2}	0,00	-0,99	0,00		0,00	0,00
c_{G3}	0,00		-0,21		0,00	0,00
c_{G4}	0,20		0,00	-0,41	0,00	0,02
c_{G5}	0,80		0,00		0,00	0,08
c_{G6}	0,11		-0,07		0,00	-0,10
M2D						
c_{G1}	0,02		-1,19	0,00	0,00	0,00
c_{G2}	0,00	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00
c_{G3}	0,59		-0,24	0,00	0,00	0,05
c_{G4}	-0,04		0,06	0,22	0,55	0,16
c_{G5}	0,26		-0,01	0,20	-0,27	0,27
c_{G6}	0,00		0,04	0,07	-0,10	-0,60

cd. tabeli 2

1	2	3	4	5	6	7
M3						
c_{G1}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G2}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G3}	0,00		0,00	-100,00	0,00	-100,00
c_{G4}	0,00			-100,00	0,00	-40,66
c_{G5}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G6}	0,00			-111,47	0,00	-100,00
M3D						
c_{G1}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G2}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G3}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G4}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G5}	0,00			-100,00	0,00	-100,00
c_{G6}	0,00			-100,00	0,00	-100,00

W tabeli 2 przedstawiono mediany cenowej elastyczności podaży produktów rolnych. Puste pola oznaczają przypadki, w których dana zmienna decyzyjna dla wszystkich rozpatrywanych poziomów ceny z przedziału określonego wzorem (4) przyjmowała wartość zero, co uniemożliwiało wyznaczenie odpowiednich zmian. Zmiany elastyczności podaży zachodziły skokowo. W przypadku elastyczności podaży wyraźnie można dostrzec zmienność wyników w zależności od sposobu modelowania problemu decyzyjnego producenta rolnego. Na uwagę zasługuje fakt, że dla modeli M1 i M1D wartości przyjmowane przez niektóre zmienne decyzyjne pozostawały niezależne od poziomu cen. Ujemne wartości w przypadku modeli M2, M2D, M3 i M3D (a zatem wnioski te pozostają niezmiennie niezależnie od uwzględnienia w analizie dopłat) są efektem współwystępowania substytucji i dodatkowych warunków ograniczających w zadaniu optymalizacyjnym.

Podsumowanie

W pracy podjęto próbę zbadania reakcji producentów rolnych w odpowiedzi na zmiany cen. Uwzględniono analizę zmian podaży oraz dochodu, który przyjęto jako funkcję celu. Zmienność cen otrzymywanych prowadzi do powstania ryzyka, przenoszącego się na efekt dochodowy, jednakże ze względu na fakt, iż efekt ten neutralizowany jest przez dopłaty, jego bezpośrednie uchwycenie rodzi trudności.

Wykorzystano ujęcie mikroekonomiczne oraz model optymalizacyjny problemu wyboru producenta rolnego. Reakcje decydentów na zmiany cen otrzymywanych zostały oszacowane przy uwzględnieniu efektów polityki rolnej w postaci dopłat oraz dla danych kosztów wynikających ze współczynników techniczno-produkcyjnych i danych cen płaconych za zaangażowane czynniki produkcji.

W badaniu eksperymentalnym posiłkowano się oryginalnymi danymi dla gospodarstw rolnych FADN. Wyniki są obiecujące, zgodne z twierdzeniami i prawidłowościami ekonomiki rolnictwa i mikroekonomii. Pozytywna reakcja na zmiany cen w zakresie podaży i dochodów jest większa dla tych modeli wyboru, w których nie uwzględniano dopłat realizowanych w ramach polityki rolnej. Ma to przesłanie zarówno poznawcze, jak i aplikacyjne oraz stwarza podstawy do rozszerzenia prowadzonej analizy z uwzględnieniem liczniejszej grupy gospodarstw rolnych w kolejnych pracach.

Literatura

- Aimin H.: Uncertainty, Risk Aversion and Risk Management in Agriculture. „Agriculture and Agricultural Science Procedia” 2010, No. 1.
- Atwood J.A., Watts M.J., Helmers G.A., Held L.J.: Incorporating Safety First Constraints In Linear Programming Production Models. „Western Journal of Agricultural Economics” 1988, No. 01.
- Bezat-Jarzębowska A., Rembisz W., Sielska A.: Wybór polityki i jej wpływ na decyzje producentów rolnych w ujęciu analitycznym z elementami weryfikacji empirycznej. Program Wieloletni 2011-2014. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2012, nr 49.
- Constance D.H., Gilles J.L., Heffernan W.D.: Agrarian Policies and Agricultural Systems in the United States. In: Agrarian Policies and Agricultural Systems. Ed. A. Bonanno. Westview Press, Boulder, Colorado 1990.
- Czekaj S., Majewski E., Wąs A.: Koncepcja oszacowania skutków reform Wspólnej Polityki Rolnej Unii Europejskiej (WPR) w perspektywie budżetowej 2014-2020. W: Dopłaty bezpośrednie i dotacje budżetowe a finanse oraz funkcjonowanie gospodarstw i przedsiębiorstw rolniczych. Program Wieloletni 2011-2014. Red. J. Kulawik. IERiGŻ, Warszawa 2011, nr 20.
- Gędek S.: Optymalizacja planów rocznych rodzinnego gospodarstwa rolnego. SGGW, Warszawa 2009.
- Hazell P.B.R., Norton R.D.: Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture. Macmillan Publishing Company, New York 1986.
- Hazell P.B.R.: A Linear Alternative to Quadratic and Semivariance Programming for Farm Planning under Uncertainty. „American Journal of Agricultural Economics” 1970, Vol. 53.
- Kellermann K., Happe K., Sahrbacher C., Balmann A., Brady M., Schnicke H., Osuch A.: AgriPoliS 2.1 – Model documentation. IAMO, 2008.

- McCann E., Sullivan S., Erickson D., de Young R.: Environmental Awareness, Economic Orientation, and Farming Practices: A Comparison of Organic and Conventional Farmers. „Environmental Management” 1997, No. 5.
- McInerney J.P.: Game Theoretic Procedures in Relation to Farm Management Decisions. Iowa State University, Ames 1964 (niepublikowane).
- Moschini G., Hennessy D.A.: Uncertainty, Risk Aversion, and Risk Management for Agricultural Producers. In: Handbook of Agricultural Economics, Volume 1A Agricultural Production. Ed. B.L. Gardner, G.C. Rausser. Elsevier Science, Amsterdam 2001.
- Produkcja, koszty i dochody z wybranych produktów rolniczych w latach 2010-2011 (wyniki rachunku symulacyjnego). Red. I. Augustyńska-Grzymek. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2012.
- Rembisz W.: Kwestie ryzyka, cen, rynku, interwencji i stabilnością dochodów w rolnictwie. Vizja Press&IT, Warszawa 2013.
- Rembisz W.: Mikroekonomiczne podstawy wzrostu dochodu producentów rolnych. Vizja Press&IT, Warszawa 2007.
- Sielska A.: Decyzje producentów rolnych w ujęciu wielokryterialnym – zarys problemu. IERiGŻ-PIB, Warszawa 2012.
- Trinidad Segovia J.E., Cruz Rambaud S., García García C.B.: A Model for Determining Efficient Portfolio Cropping Plans in Organic Farming. „Spanish Journal of Agricultural Research” 2005, No. 2.

RISK AND PRICE ELASTICITY OF SUPPLY OF AGRICULTURAL PRODUCTS

Summary

The paper deals with a problem of producers' sensitivity to changes in buying-in prices. Prices are one of the factors influencing agricultural producer's decisions, and problems discussed in this paper are important in agricultural economics, because they complement price elasticity of production analysis. Usually in the analysis of producers' sensitivity to changes in buying-in prices, the sensitivity of income is taken into account, as well as price intervals, in which the supply of agricultural products is characterized by high or low elasticity. We assume that the function of the individual agricultural producer is to maximize income.

The problem of producers' sensitivity to changes in prices is independent of methods of price determination (both market and institutional factors). Predicting and measuring producers' reactions are considered key issues, that allow to make conclusions concerning adequate instruments of policy intervention in agriculture. The paper deals with producers' reactions in the short run.

Wojciech Sikora

Michał Urbaniak

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

SPRAWNOŚĆ METOD OGÓLNYCH I WYSPECJALIZOWANYCH W ANALIZIE CZASOWO-KOSZTOWEJ PRZEDSIĘWZIĘĆ

Wprowadzenie

W pracy rozpatrujemy klasyczny problem analizy czasowo-kosztowej przedsięwzięć polegający na minimalizacji kosztów przy zadanym (dyrektywnym) terminie jego zakończenia. O ile w analizie czasowej przedsięwzięć czas trwania poszczególnych czynności jest dany, to w analizie czasowo-kosztowej czas ten jest zmienną decyzyjną, mieszczącą się w określonym przedziale czasowym i generującą różne koszty wykonania.

Zagadnienia optymalizacyjne związane z analizą czasowo-kosztową można rozwiązywać dwojako:

- 1) sformułować ich modele w postaci zadań programowania liniowego (PL) lub programowania dyskretnego, liniowego (PDL), które rozwiązujemy korzystając z ogólnych metod,
- 2) sformułować specjalne, efektywne algorytmy wykorzystujące sieciowy opis przedsięwzięcia.

W drugim przypadku algorytmy specjalne dzielimy na dwie klasy¹:

- 1) dokładne, dosyć skomplikowane i czasochłonne, gwarantujące uzyskanie rozwiązania optymalnego,
- 2) przybliżone, o prostej postaci, dające szybko rozwiązanie suboptymalne.

W artykule przedstawimy dwa modele optymalizacyjne rozważanego problemu dla liniowej i punktowej reprezentacji krzywej kosztów. Model w postaci zadania PL wraz z algorytmem simpleks tworzą pierwszą, ogólną metodę roz-

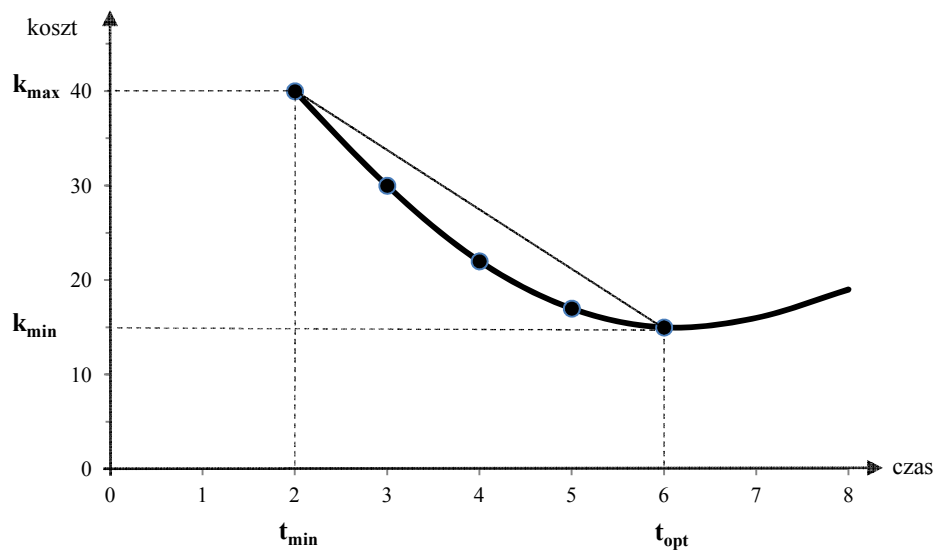
¹ H. Gaspar: Propozycja nowego algorytmu w analizie czasowo-kosztowej przedsięwzięć. „Badania Operacyjne i Decyzje” 2006, nr 3-4.

wiązywania problemu. W zależności, czy punktem wyjścia jest najkrótszy bądź najdłuższy czas wykonywania czynności otrzymujemy dwa podejścia polegające na wydłużaniu bądź skracaniu poszczególnych czynności. Reprezentantem pierwszego podejścia jest nowy algorytm wydłużania W1, sformułowany w artykule Sikory², przedstawicielem natomiast drugiego podejścia jest zmodyfikowany algorytm skracania czynności krytycznej Kaufmanna i Desbazeille'a³.

W pracy przedstawiono obydwa algorytmy oraz porównano sprawność wszystkich trzech metod.

1. Analiza czasowo-kosztowa

W analizie czasowo-kosztowej czas trwania czynności nie jest parametrem, ale zmienną decyzyjną przyjmującą wartości z zadanego przedziału czasu. Zależność kosztu wykonania czynności od czasu jej realizacji można przedstawić w postaci tzw. krzywej kosztu – na rys. 1.



Rys. 1. Krzywa kosztu

² W. Sikora: Metoda wydłużania czynności w analizie czasowo-kosztowej przedsięwzięć. W: Z prac katedry badań operacyjnych. Red. W. Sikora. UEP, Poznań 2012.

³ A. Kaufmann, G. Desbazeille, E. Ventura: La méthode du chemin critique. Dunod, Paris 1964

Zależność ta jest funkcją wypukłą. Interesuje nas czas od $t_{\min}$ do t_{opt} . Przedziałowi temu odpowiada przedział kosztu $[k_{\max}, k_{\min}]$. Im krótszy czas realizacji, tym większy koszt. Im dłuższy czas, tym niższy koszt, który osiąga minimum dla czasu t_{opt} , a potem wzrasta.

Krzywa kosztu w postaci ciągłej funkcji wypukłej to oczywiście pewna idealizacja zjawiska. W praktyce nie jesteśmy w stanie oszacować jej postaci analitycznej. Zakładamy, że dokonujemy na przedziale $[t_{\min}, t_{\text{opt}}]$:

- jej aproksymacji liniowej,
- aproksymacji odcinkowo-liniowej,
- ustalenia jej wartości dla wybranych czasów realizacji.

W dalszych analizach przyjmujemy dwa warianty reprezentacji krzywej kosztu:

- liniowa – znamy $k_{\max}$, $k_{\min}$, $t_{\min}$, t_{opt} i określamy średnie tempo spadku kosztu Δk ,
- punktowa – znamy wartości krzywej kosztu dla wszystkich czasów wykonania wyrażonych w liczbach całkowitych, ustalamy wówczas kolejne spadki kosztu $\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta k_3, \dots$

Zakładamy, że wszystkie możliwe czasy realizacji czynności są liczbami całkowitymi z przedziału $[t_{\min}, t_{\text{opt}}]$.

Realizując przedsięwzięcie często mamy zadany dyrektywny czas jego ukończenia T^d bądź dyrektywny koszt jego wykonania K^d , które nie mogą być przekroczone. Powstają wówczas dwa podstawowe problemy optymalizacyjne:

1) problem I – ustal taki plan realizacji przedsięwzięcia, aby koszt realizacji był minimalny, a czas realizacji nie przekraczał czasu dyrektywnego T^d ,

2) problem II – ustal taki plan realizacji przedsięwzięcia, aby czas realizacji był minimalny, a koszt realizacji nie przekraczał kosztu dyrektywnego K^d .

Problem I symbolicznie można zapisać następująco: znajdź taki plan realizacji X , aby

$$k(X) \Rightarrow \min \quad (1)$$

$$t(X) \leq T^d \quad (2)$$

gdzie:

$k(X)$ – koszt realizacji przedsięwzięcia dla planu X ,

$t(X)$ – czas realizacji przedsięwzięcia dla planu X .

Problem II zapisujemy wówczas następująco: znajdź taki plan realizacji X , aby

$$t(X) \Rightarrow \min \quad (3)$$

$$k(X) \leq K^d \quad (4)$$

Każdy z tych problemów można sformułować w postaci zadania programowania liniowego (PL), jeżeli zakładamy liniową reprezentację krzywej kosztów bądź w postaci zadania programowania dyskretnego, liniowego (PDL), jeżeli zakładamy punktową reprezentację krzywej kosztów. Dalej zajmujemy się tylko problemem I.

2. Modele optymalizacyjne

Strukturę przedsięwzięcia możemy przedstawić w postaci grafu $G = \langle P, U \rangle$, gdzie P – zbiór węzłów reprezentujących zdarzenia, a U – zbiór łuków reprezentujących czynności. Graf ten powinien być grafem prostym, zorientowanym i acyklicznym.

Oznaczmy:

t'_{ij} – najkrótszy czas realizacji czynności $\langle i, j \rangle$,

t''_{ij} – najdłuższy czas realizacji czynności $\langle i, j \rangle$,

Δt_{ij} – maksymalnie dopuszczalne wydłużenie czasu realizacji czynności $\langle i, j \rangle$,

w_{ij} – wydłużenie czasu realizacji czynności $\langle i, j \rangle$,

t_i – najwcześniejszy moment zajścia zdarzenia i -tego,

k'_{ij} – maksymalny koszt wykonania czynności $\langle i, j \rangle$,

k''_{ij} – minimalny koszt wykonania czynności $\langle i, j \rangle$,

Δk_{ij} – średni spadek kosztu, o ile wydłużymy czynność $\langle i, j \rangle$ o jednostkę czasu,

K – łączny koszt realizacji przedsięwzięcia,

$K_{\max}$ – maksymalny łączny koszt realizacji przedsięwzięcia,

n – liczba węzłów w sieci czynności (numer węzła końcowego),

m – liczba czynności tworzących przedsięwzięcie.

Między tymi wielkościami zachodzą następujące zależności

$$\Delta t_{ij} = t''_{ij} - t'_{ij} \quad (5)$$

$$\Delta k_{ij} = \frac{k'_{ij} - k''_{ij}}{\Delta t_{ij}} \quad (6)$$

$$K = K_{max} - \sum_{\langle i,j \rangle \in U} \Delta k_{ij} w_{ij} \quad (7)$$

Problem I przy reprezentacji liniowej krzywej kosztu można zapisać następująco: znajdź takie wartości zmiennych decyzyjnych t_i oraz w_{ij} , aby

$$\sum_{\langle i,j \rangle \in U} \Delta k_{ij} w_{ij} \Rightarrow \max \quad (8)$$

$$t_1 = 0 \quad (9)$$

$$t_j - t_i \geq t'_{ij} + w_{ij}, \text{ dla } \langle i, j \rangle \in U \quad (10)$$

$$t_n \leq T^d \quad (11)$$

$$0 \leq w_{ij} \leq \Delta t_{ij}, \text{ dla } \langle i, j \rangle \in U \quad (12)$$

Zadanie (8)-(12) jest zadaniem PL. Oznaczmy je jako model MLI. Liczba zmiennych $L(z) = n + m$, a liczba warunków $L(w) = 2 + 2m$. Maksymalizacja łącznego spadku kosztu funkcji celu (8) jest równoważna minimalizacji kosztu realizacji przedsięwzięcia.

Przy reprezentacji punktowej krzywej kosztu sformułowanie modelu jest trudniejsze. Oznaczmy:

k^r_{ij} – spadek kosztu, o ile czynność $\langle i, j \rangle$ jest wydłużana o r -tą z kolei jednostkę czasu,

$$w^r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli czynność } \langle i, j \rangle \text{ jest wydłużana o } r\text{-tą jednostkę czasu,} \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$$

Z wypukłości krzywej kosztu wynika, że

$$k^1_{ij} > k^2_{ij} > \dots > k^{r-1}_{ij} > k^r_{ij} > \dots$$

Zakładamy także, że wszystkie parametry Δt_{ij} i t'_{ij} są liczbami całkowitymi.

Problem PI przy reprezentacji punktowej krzywej kosztu można zapisać następująco: znaleźć takie wartości zmiennych t_i oraz w_{ij}^r , aby

$$\sum_{\langle i,j \rangle \in U} \sum_{r=1}^{\Delta t_{ij}} k_{ij}^r w_{ij}^r = \max \quad (13)$$

$$t_1 = 0 \quad (14)$$

$$t_j - t_i \geq t'_{ij} + \sum_{r=1}^{\Delta t_{ij}} w_{ij}^r, \text{ dla } \langle i,j \rangle \in U \quad (15)$$

$$t_n \leq T^d \quad (16)$$

$$w_{ij}^r \in \{0, 1\}, \text{ dla } \langle i,j \rangle \in U, r = 1, \dots, \Delta t_{ij} \quad (17)$$

W zadaniu (13)-(17) zmienna w_{ij}^r może przyjąć wartość 1 tylko wówczas, gdy $w_{ij}^g = 1$ dla $g < r$. Wprowadzenie tego typu ograniczenia do modelu nie jest jednak konieczne, gdyż spełnienie tej relacji wymusza wypukłość funkcji kosztu.

Zadanie (13)-(17) jest zadaniem programowania dyskretnego, liniowego (PDL). Oznaczmy je jako model MDI. Jeżeli przyjmiemy, że średnio maksymalny czas wydłużenia czynności wynosi s , to liczba zmiennych $L(z) = n + ms$, a liczba warunków $L(w) = 2 + m$. Pomijamy w tym rachunku warunek (17) dotyczący binarności zmiennych w_{ij}^r .

Jeżeli w zadaniu (13)-(17) warunek (17) zastąpimy warunkiem słabszym

$$0 \leq w_{ij}^r \leq 1, \text{ dla } \langle i,j \rangle \in U, r = 1, \dots, \Delta t_{ij} \quad (18)$$

to dostajemy zadanie PL. Oznaczmy je jako MDLI. Liczba zmiennych $L(z) = n + ms$, a liczba warunków $L(w) = 2 + m + ms$. Zadanie MDLI łatwiej rozwiązywać niż zadanie MDI. Jego rozwiązywanie byłoby bardziej efektywne, gdybyśmy zastosowali specjalne algorytmy uwzględniające specyficzną strukturę zadania⁴. W pracy Sikory⁵ podano twierdzenie o równoważności obydwu zadań.

⁴ W. Sikora: Metoda stopniowej analizy zmiennych dla zadania programowania rozłącznego. „Przegląd Statystyczny” 1991, nr 2.

⁵ Idem: Metoda wydłużania..., op. cit.

Rozwiązywanie zadań sformułowanych w tym rozdziale algorytmem sympleks daje nam ogólną metodę analizy czasowo-kosztowej. Omawiając metody specjalne najpierw przedstawimy metodę wydłużania czynności, zapewniającą uzyskanie rozwiązań przybliżonych (suboptymalnych), którą zaproponowano w pracy Sikory⁶.

3. Idea metody wydłużania czynności

Ogólna idea tej metody sprowadza się do stopniowego wydłużania czynności tak, aby prowadziło to do jak największego spadku kosztu realizacji całego przedsięwzięcia $k(X)$.

Zakładamy, że strukturę każdego przedsięwzięcia opisuje graf $G = \langle P, U \rangle$. Dane są: czasy minimalne trwania czynności – t'_{ij} , maksymalne koszty realizacji czynności – k'_{ij} , kolejne spadki kosztu realizacji czynności Δk^r_{ij} (dla $r = 1, \dots, \Delta t_{ij}$) oraz czas dyrektywny wykonania przedsięwzięcia – T^d .

Zdefiniujemy kilka podstawowych pojęć dla metody wydłużania czynności.

Definicja 1. Siecią czasową nazywamy sieć czynności, w której poszczególnym czynnościom (łukom) przyporządkowane są ich bieżące czasy trwania.

Definicja 2. Siecią kosztową nazywamy sieć czynności, w której poszczególnym czynnościom (łukom) przyporządkowane są aktualne spadki kosztu w wyniku ich wydłużenia o jednostkę czasu.

Definicja 3. Frontem sieci kosztowej nazywamy każdy zbiór czynności (łuków) zawierający dokładnie po jednym łuku z każdej ścieżki pełnej z tej sieci.

Frontem w sieci kosztowej jest więc każdy maksymalny zbiór czynności równoczesnych, czyli takich, że żadne dwie czynności frontu nie leżą na tej samej ścieżce⁷.

Definicja 4. Kosztem frontu nazywamy aktualny spadek kosztu realizacji przedsięwzięcia w wyniku wydłużenia czynności frontu o jednostkę czasu.

Jeżeli czynności przyporządkowany jest koszt zerowy, to nie jest ona wydłużana o jednostkę czasu.

Definicja 5. Frontem o maksymalnym spadku nazywamy front o największym koszcie spośród wszystkich frontów, które można utworzyć w danej sieci.

⁶ Więcej o metodach specjalnych zobacz: H. Gaspars-Wieloch: Analiza sieciowa przedsiębiorstw. W: Badania operacyjne. Red. W. Sikora. PWE, Warszawa 2008; a o niektórych niedostatkach tych algorytmów – zobacz Eadem: Propozycja..., op. cit.

⁷ H. Gaspars-Wieloch taki zbiór nazywa przekrojem dokładnym. Nieco inną definicję frontu podano w pracy: E. Ignasiak: Programowanie sieciowe. PWE, Warszawa 1972, s. 50.

4. Algorytm W1 dla zadania MDI

W zadaniu MDI dany jest czas dyrektywny T^d realizacji przedsięwzięcia, który nie może być przekroczony. W algorytmie W1, w każdej iteracji generujemy bieżącą sieć czasową (ST^p) oraz bieżącą sieć kosztową (SK^p).

W sieci czasowej, na podstawie aktualnych czasów wykonania t_{ij} , ustalamy: najwcześniejsze momenty t_j , najpóźniejsze momenty t'_j oraz całkowite zapasy czasu z_{ij}^c .

Najwcześniejsze momenty liczymy zgodnie z wzorem

$$t_j = \begin{cases} 0, & \text{dla } j = 1 \\ \max_{i \in P_j} \{t_i + t_{ij}\}, & \text{dla } j = 2, \dots, n \end{cases} \quad (19)$$

a najpóźniejsze momenty

$$t'_i = \begin{cases} T^d, & \text{dla } i = n \\ \min_{j \in N_i} \{t'_j - t_{ij}\}, & \text{dla } i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (20)$$

gdzie:

- t_j – najwcześniejszy moment zajścia zdarzenia j-tego,
- t'_i – najpóźniejszy moment zajścia zdarzenia i-tego,
- t_{ij} – aktualny czas trwania czynności $\langle i, j \rangle$,
- P_j – zbiór poprzedników (węzłów) zdarzenia j-tego,
- N_i – zbiór następników (węzłów) zdarzenia i-tego.

Mając ustalone momenty najwcześniejsze i najpóźniejsze możemy obliczyć dla poszczególnych czynności całkowite zapasy czasu

$$z_{ij}^c = t'_j - t_i - t_{ij}, \text{ dla } \langle i, j \rangle \in U \quad (21)$$

Czynności, dla których zapasy całkowite są zerowe nazywamy czynnościami krytycznymi, a ścieżkę składającą się z nich – ścieżką krytyczną. Pozostałe czynności o dodatnich zapasach całkowitych nazywamy niekrytycznymi.

Jeżeli $t_n < T^d$, to aktualna sieć czasowa nie ma żadnej czynności krytycznej, czyli takiej, dla której zapas całkowity jest zerowy.

W sieci kosztowej koszt bieżący dla czynności $\langle i, j \rangle$ wynosi

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jeżeli czynność } \langle i, j \rangle \text{ jest krytyczna,} \\ 0, \text{ jeżeli czynność } \langle i, j \rangle \text{ jest niekrytyczna, niewydłużalna,} \\ k_{ij}^r, \text{ jeżeli czynność } \langle i, j \rangle \text{ jest niekrytyczna, wydłużalna,} \\ \text{o aktualnym czasie trwania } t_{ij}' + r - 1 \end{cases} \quad (22)$$

W sieci czasowej ST^{p+1} wydłużamy o jednostkę czasu realizacji tych czynności, które należą do frontu o maksymalnym spadku i mają dodatnie koszty.

Kończymy procedurę wydłużenia czynności, jeżeli bieżąca sieć kosztów ma tylko zerowe koszty wydłużenia czynności.

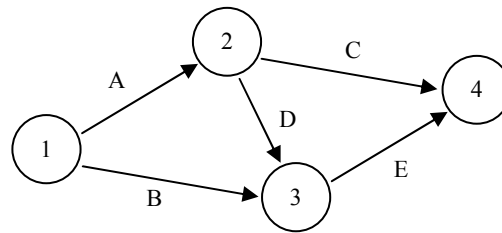
Jeżeli dla pierwszej sieci czasowej ST^1 czas realizacji przedsięwzięcia $T^* = t_n' > T^d$, to przedsięwzięcie jest niewykonalne w czasie dyrektywnym T^d .

Algorytm W1 sprowadza się do następujących kroków:

- K1. Utwórz początkową sieć czasową ST^1 , w której $t_{ij} = t_{ij}'$, oblicz momenty najwcześniejsze t_j , najpóźniejsze t_j' , całkowite zapasy czasu z_{ij}^c . Utwórz początkową sieć kosztową SK^1 , zgodnie z wzorem (22), podaj aktualny czas i koszt realizacji przedsięwzięcia.
- K2. Sprawdź, czy aktualna sieć kosztowa SK^p jest zerowa. Jeżeli tak – idź do kroku K5. Jeżeli nie – idź do kroku K3.
- K3. W sieci kosztowej SK^p ustal front o maksymalnym spadku.
- K4. W następnej sieci czasowej ST^{p+1} wydłuż o jednostkę czas wykonania czynności, które miały w ostatniej sieci SK^p dodatnie spadki kosztu. Utwórz nową macierz kosztów SK^{p+1} . Ustal bieżący czas i koszt realizacji przedsięwzięcia i przejdź do kroku K2.
- K5. Aktualny plan realizacji jest planem końcowym (koniec procedury wydłużania czynności).

Przykład 1. Rozważmy przedsięwzięcie składające się z pięciu czynności A, B, C, D, E. Strukturę przedsięwzięcia przedstawia rys. 2. W tabeli 1 podano charakterystykę czasowo-kosztową wszystkich czynności składających się na przedsięwzięcie. Dyrektywny czas realizacji $T^d = 12$.

Należy ustalić taki plan realizacji przedsięwzięcia, aby wykonać je w czasie nie dłuższym od czasu dyrektywnego, a koszt realizacji był minimalny.



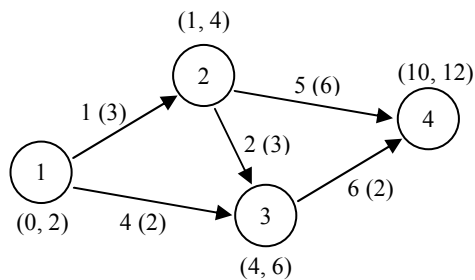
Rys. 2. Struktura przedsięwzięcia

Tabela 1

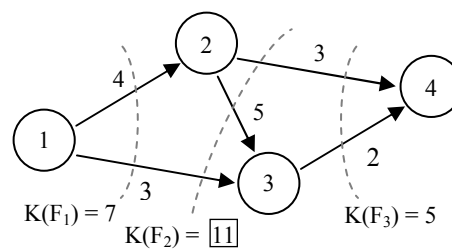
Charakterystyka czasowo-kosztowa przedsięwzięcia

Czynności	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 2, 4 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$
t'_{ij}	1	4	5	2	6
k'_{ij}	18	22	20	19	11
Δk^1_{ij}	4	3	3	5	2
Δk^2_{ij}	3	2	2	4	–

Do rozwiązania tego zadania stosujemy algorytm W1. Początkową sieć czasową zawiera rys. 3. Dla planu realizacji P1 minimalny czas realizacji $T1 = 10$, a maksymalny koszt realizacji $K1 = 90$. W sieci kosztowej SK1 podane są spadki kosztów, jeżeli wydłużamy czas realizacji poszczególnych czynności o 1 jednostkę. W sieci tej mamy 3 fronty: $F_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, $F_2 = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$, $F_3 = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ ze spadkami kosztu odpowiednio: 7, 11, 5.



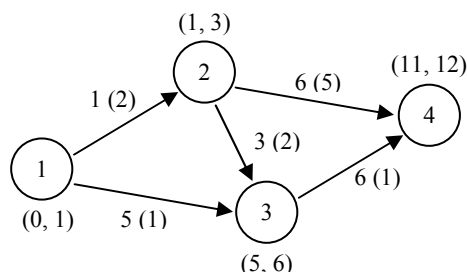
Rys. 3. Sieć czasowa ST1



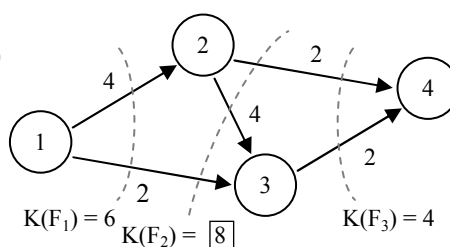
Rys. 4. Sieć kosztowa SK1

P1: $T1 = 10$, $K1 = 90$

Ponieważ front F_2 jest frontem o maksymalnym spadku, więc czynności $\langle 2, 4 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$ i $\langle 1, 3 \rangle$ wydłużamy o jednostkę. Nowy plan realizacji zawiera rys. 5.



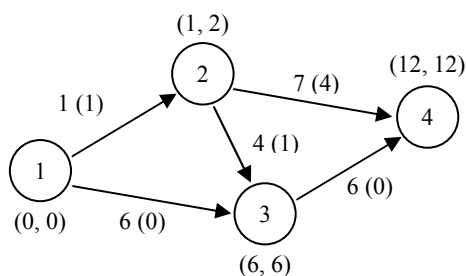
Rys. 5. Sieć czasowa ST2



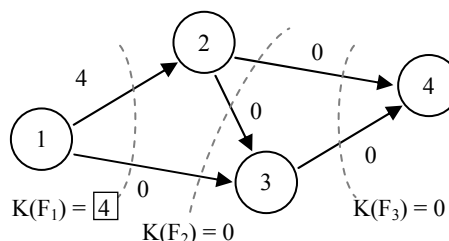
Rys. 6. Sieć kosztowa SK2

$$P2: T2 = 11, K2 = 90 - 11 = 79$$

Plan przedstawiony na rys. 5 ma czas realizacji $T2 = 11$, koszt realizacji 79. W sieci SK2 szukamy ponownie frontu o maksymalnym spadku, jest nim front F_2 . Wydłużenie czynności go tworzących obniża aktualny koszt realizacji o 8.



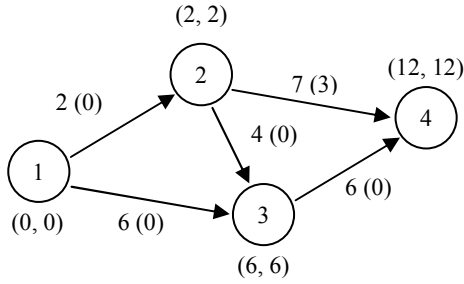
Rys. 7. Sieć czasowa ST3



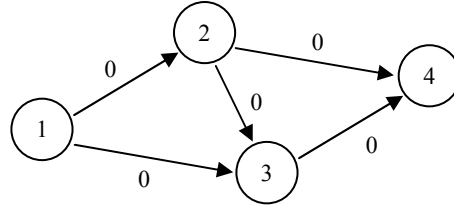
Rys. 8. Sieć kosztowa SK3

$$P3: T3 = 12, K3 = 79 - 8 = 71$$

Plan $P3$ przedstawiony na rys. 7 ma czas realizacji $T3 = 12$ równy czasowi dyrektywnemu T^d . Czynności $\langle 1, 3 \rangle$ i $\langle 3, 4 \rangle$ są krytycznymi, a czynności $\langle 2, 3 \rangle$ i $\langle 2, 4 \rangle$ są już niewydłużalne, a więc zgodnie ze wzorem (22) jedyny dodatni spadek kosztu ma czynność niekrytyczna $\langle 1, 2 \rangle$ ze spadkiem 4. Ta czynność zostanie wydłużona o 1 jednostkę.



Rys. 9. Sieć czasowa ST4



Rys. 10. Sieć kosztowa SK4

$$P4: T4 = 12, K2 = 71 - 4 = 67$$

Plan P4 jest planem końcowym, gdyż odpowiadająca mu na rys. 10 sieć kosztowa jest zerowa. Nie ma już żadnej czynności, którą można wydłużyć nie przekraczając czasu dyrektywnego $T^d = 12$.

W pracy Sikora⁸ do szukania frontu o maksymalnym spadku zaproponowany został specjalny algorytm. Jest on analogiem algorytmu Forda-Fulkersona szukania maksymalnego przepływu w sieci⁹. W naszym przypadku, aby wyznaczyć front o maksymalnym spadku, szukamy minimalnego przepływu w sieci z dolnymi ograniczeniami¹⁰.

Algorytm W1 można stosować także do rozwiązywania problemu z liniową reprezentacją krzywej kosztów, w tym przypadku zamiast wydłużać czas trwania czynności tworzących front o jednostkę, można je wydłużać o więcej jednostek. Aby to ustalić, dla każdej czynności tworzącej front o dodatnim koszcie bieżącym wyznaczamy maksymalne aktualne jej wydłużenie,

$$w_{ij} = \min\{t_{ij}'' - t_{ij}, z_{ij}^c\} \quad (23)$$

a następnie obliczamy wielkość wydłużenia czynności frontu, zgodnie z wzorem

$$w = \min\{w_{ij} | \langle i, j \rangle \in \bar{U}^p\} \quad (24)$$

gdzie:

$\bar{U}^p$ – zbiór czynności tworzących front, o dodatnich kosztach bieżących.

⁸ W. Sikora: Metoda wydłużania..., op. cit.

⁹ L.R. Ford, D.R. Fulkerson: Przepływy w sieciach. PWN, Warszawa 1969; M. Anholcer: Przepływy w sieciach. W: Badania operacyjne. Op. cit.

¹⁰ W. Sikora: Metoda wydłużania..., op. cit., s. 125-128.

5. Zmodyfikowany algorytm Kaufmanna i Desbazeille'a (ZKD)

Klasyczny algorytm Kaufmanna i Desbazeille'a (KD) polega na stopniowym skracaniu czynności krytycznych. Dla danej sieci $S = \langle P, U \rangle$, dla każdej czynności $\langle i, j \rangle$ znamy: t_{ij}'' – jej najdłuższy czas realizacji oraz k_{ij}^r – wzrost kosztu realizacji, jeżeli skracamy ją o r -tą z kolei jednostkę czasu.

W każdej iteracji, podobnie jak w algorytmie W1, generujemy bieżącą sieć czasową (ST^P) oraz bieżącą sieć kosztową (SK^P).

W sieci czasowej, na podstawie aktualnych czasów realizacji, ustalamy najwcześniejsze momenty zajścia zdarzeń t_j , najpóźniejsze momenty zajścia zdarzeń t_j' oraz całkowite zapasy czasu z_{ij}^c . Przyjmujemy przy tym, że: $t_1 = 0$, $t_n' = t_n$.

Sieć kosztowa składa się tylko z czynności krytycznych, dla których aktualny, całkowity zapas czasu $z_{ij}^c = 0$. W krytycznej sieci kosztowej, koszt bieżący dla czynności $\langle i, j \rangle$ wynosi:

$$k_{ij} = \begin{cases} k_{ij}^r, & \text{jeżeli czynności } \langle i, j \rangle \text{ ma aktualny czas trwania } t_{ij}'' - r + 1 \\ \infty, & \text{jeżeli czynność } \langle i, j \rangle \text{ nie może być dalej skracana, gdyż } t_{ij} = t_{ij}' \end{cases} \quad (25)$$

W sieci kosztowej szukamy frontu o minimalnym wzroście kosztu. Wszystkie czynności tworzące taki front skracamy o jednostkę, a czas realizacji całego przedsięwzięcia skraca się także o jednostkę.

Przy komputerowej implementacji algorytmu wygodniej w sieci kosztowej szukać nie frontu o minimalnym koszcie, ale przekroju o minimalnym koszcie.

Definicja 6. Jeżeli zbiór węzłów sieci kosztowej podzielimy na dwa takie podzbiory $P1$ oraz $P2$, że węzeł „1” $\in P1$, a węzeł „n” $\in P2$, to przekrojem nazywamy każdy maksymalny zbiór łuków $\langle i, j \rangle$ takich, iż $i \in P1$, a $j \in P2$.

Przekrój może zawierać więcej niż jedną czynność z każdej ścieżki pełnej w sieci, natomiast front – tylko jedną.

Do szukania minimalnego przekroju w sieci, można wykorzystać znany algorytm Forda, Fulkersona, Edmondsa i Karpa (FFEK). Zastosowanie algorytmu FFEK powinno poprawić działanie algorytmu KD zwiększając szybkość obliczeń oraz polepszając jego dokładność¹¹.

Dalej algorytm KD z podaną poprawką nazywać będziemy zmodyfikowanym algorytmem Kaufmanna i Desbazeille'a (ZKD).

¹¹ M. Anholcer: Op. cit.

Algorytm ZKD sprowadza się do następujących kroków:

- K1. Utwórz początkową sieć czasową ST^1 , w której $t_{ij} = t_{ij}''$. Oblicz najwcześniejsze momenty t_j , najpóźniejsze momenty t_j' oraz całkowite zapasy czasu z_{ij}^c . Przyjmij $p := 1$.
- K2. Sprawdź, czy aktualny czas realizacji projektu $T^p \leq T^d$. Jeżeli tak, idź do kroku K6. Jeżeli nie, idź do kroku K3.
- K3. W sieci kosztowej SK^p ustal przekrój o minimalnym koszcie $\underline{U}^p$.
- K4. Sprawdź, czy koszt minimalnego przekroju $K(\underline{U}^p) < \infty$. Jeżeli tak, przejdź do kroku K5. Jeżeli nie, przejdź do kroku K7.
- K5. W kolejnej sieci czasowej SK^{p+1} , skróć o jednostkę czasu trwania czynności, które tworzą minimalny przekrój. Ustal dla tej sieci czas realizacji projektu T^{p+1} oraz zapasy czasu z_{ij}^c . Przyjmij $p := p + 1$ i wróć do kroku K2.
- K6. Znalezione zostały końcowy plan realizacji projektu.
- K7. Analizowane zadanie jest sprzeczne (brak dopuszczalnego planu realizacji).

Algorytm ZKD można stosować także do rozwiązywania problemu z liniową reprezentacją krzywej kosztów. Efektywnie wówczas skracać czynności nie o jedną jednostkę, ale o więcej niż jedną jednostkę. Aby tę wielkość ustalić, dla czynności należących do minimalnego przekroju obliczamy aktualne możliwe skrócenie

$$s_{ij} = t_{ij} - t_{ij}', \quad \langle i, j \rangle \in \underline{U}^p \quad (26)$$

Niech N będzie aktualnym zbiorem czynności niekrytycznych. Ustalamy trzy parametry

$$a = \min\{s_{ij} \mid \langle i, j \rangle \in \underline{U}^p\} \quad (27)$$

$$z = \min\{z_{ij}^c \mid \langle i, j \rangle \in N\} \quad (28)$$

$$v = T^p - T^d \quad (29)$$

i wyznaczamy maksymalne skrócenie czynności minimalnego przekroju

$$s = \min\{a, z, v\} \quad (30)$$

6. Analiza sprawności metod ogólnych i wyspecjalizowanych

W analizie wzięto pod uwagę trzy metody:

- 1) metodę ogólną – zadanie PL + odpowiedni algorytm jego rozwiązywania, czyli algorytm simpleks,
- 2) algorytm wydłużania czynności W1,
- 3) algorytm skracania czynności ZKD.

Wszystkie trzy metody oprogramowano w języku Java tworząc również generator przypadków testowych sparametryzowanych względem: liczby wierzchołków, stopni wierzchołków, liczby spadku kosztów. Zbadano czas obliczeń i dokładność wyników. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabelach 2 i 3.

Tabela 2

Czas obliczeń (w sekundach) dla trzech metod

Liczba wierzchołków	Stopień wierzchołka	PL	W1	ZKD
5	2	0,0020	0,0019	0,0023
5	3	0,0022	0,0019	0,0013
10	2	0,0037	0,0002	0,0010
10	3	0,0041	0,0004	0,0003
10	5	0,0092	0,0018	0,0004
20	2	0,0083	0,0015	0,0009
20	3	0,0128	0,0016	0,0018
20	5	0,0229	0,0030	0,0020
20	10	0,0611	0,0061	0,0026
50	3	0,0694	0,0059	0,0041
50	5	0,1652	0,0144	0,0115
50	10	0,5633	0,0418	0,0354
50	20	1,5989	0,1481	0,1052
100	3	0,2775	0,0519	0,0124
100	5	0,7020	0,0735	0,0314
100	10	2,3987	0,2331	0,1534
100	20	8,6875	0,8679	0,4128
100	50	41,1588	3,4239	2,3166

Średni czas obliczeń zależy od rozmiarów sieci. Im więcej węzłów i łączących je łuków, tym czas obliczeń jest większy. Dla metody simpleks czas wzrasta od 0,002 s w najmniejszym przypadku, do 42,16 s – w największej sieci. Dla algorytmu W1 czas wzrasta odpowiednio od 0,0019 s do 3,4239 s, a dla algorytmu ZKD – od 0,0023 s do 2,3166 s.

Średnio czas obliczeń dla metody simpleks jest około 10 razy dłuższy niż dla algorytmu W1 i około 15 razy dłuższy dla algorytmu ZKD. Jednak dla żadnego przypadku czas obliczeń nie przekracza 1 minuty.

Pod względem dokładności algorytm ZKD jest także lepszy od algorytmu W1. Dokładność obu algorytmów nie zależy w tym przypadku od rozmiarów analizowanej sieci.

Tabela 3

Dokładność trzech metod (w %)

Liczba wierzchołków	Stopień wierzchołka	PL	W1	ZKD
5	2	---	0,18	0,00
5	3	---	0,47	0,00
10	2	---	0,92	0,00
10	3	---	1,38	0,02
10	5	---	0,62	0,00
20	2	---	0,74	0,00
20	3	---	1,33	0,01
20	5	---	1,65	0,00
20	10	---	0,63	0,01
50	3	---	1,05	0,00
50	5	---	1,10	0,01
50	10	---	1,03	0,00
50	20	---	0,31	0,00
100	3	---	0,39	0,02
100	5	---	0,65	0,00
100	10	---	0,79	0,01
100	20	---	0,82	0,00
100	50	---	0,60	0,02

Większa skuteczność algorytmu ZKD niż algorytmu W1 wynika prawdopodobnie z dwóch faktów:

1) szukamy minimalnego przekroju, a nie frontu, czyli minimum na szerszym zbiorze czynności, co generalnie daje większą dokładność wyniku,

2) szukamy minimalnego przekroju sieci krytycznej, a nie w całej analizowanej sieci, co pozwala na szybsze działanie algorytmu.

Gaspars-Wieloch¹² analizowała także sprawność metody ogólnej (zadanie PL + algorytm simpleks), algorytmu ZKD i własnej propozycji – algorytmu SCTPPN. Uzyskane rezultaty są zbliżone do wyników z tabeli 2 i 3. Algorytm SCTPPN działał wolniej niż ZKD, ale za to dawał wyniki bardziej dokładne niż procedura ZKD.

Podsumowanie

Analiza sprawności trzech metod wykazuje, że:

1. Zmodyfikowany algorytm skracania Kaufmanna i Desbazeille'a daje lepszą średnią dokładność oraz krótszy czas obliczeń niż algorytm wydłużania W1.
2. Metoda ogólna oparta na zadaniu PL oraz algorytmie simpleks ma czas liczenia w porównaniu z algorytmami specjalnymi kilka lub kilkanaście razy dłuższy, ale i tak czas obliczeń nie przekracza 1 minuty.
3. Ciekawe byłoby porównanie sprawności algorytmu dokładnego, ale specjalnego np. zmodyfikowanego algorytmu Philips'a i Dessouky'ego¹³.

Literatura

- Anholcer M.: Przepływy w sieciach. W: Badania operacyjne. Red. W. Sikora. PWE, Warszawa 2008.
- Anholcer M., Gaspars-Wieloch H.: The Efficiency Analysis of the Kaufmann and Desbazeille Algorithm for the Deadline Problem. „Operations Research and Decisions” 2011, Vol. 2.
- Ford L.R., Fulkerson D.R.: Przepływy w sieciach. PWN, Warszawa 1969.
- Gaspars H.: Analiza czasowo-kosztowa (CPM-COST). Algorytm a model optymalizacyjny. „Badania Operacyjne i Decyzje” 2006, nr 1.
- Gaspars H.: Propozycja nowego algorytmu w analizie czasowo-kosztowej przedsięwzięć. „Badania Operacyjne i Decyzje” 2006, nr 3-4.
- Gaspars-Wieloch H.: Analiza sieciowa przedsiębiorstw. W: Badania operacyjne. Red. W. Sikora. PWE, Warszawa 2008.

¹² H. Gaspars-Wieloch: Metody optymalizacji czasowo-kosztowej przedsięwzięcia. AE, Poznań 2008.

¹³ S.J. Philips, M.I. Dessouky: Solving the Time/Cost Tradeoff Problem using the Minimum Cut Concept. „Management Science” 1977, Vol. 24(4).

- Gaspars-Wieloch H.: Metody optymalizacji czasowo-kosztowej przedsięwzięcia. AE, Poznań 2008.
- Ignasiak E.: Programowanie sieciowe. PWE, Warszawa 1972.
- Kaufmann A., Desbazeille G., Ventura E.: La méthode du chemin critique. Dunod, Paris 1964.
- Philips S.J., Dessouky M.I.: Solving the Time/Cost Tradeoff Problem using the Minimum Cut Concept. „Management Science” 1977, Vol. 24(4).
- Sikora W.: Metoda stopniowej analizy zmiennych dla zadania programowania rozłącznego. „Przegląd Statystyczny” 1991, nr 2.
- Sikora W.: Metoda wydłużania czynności w analizie czasowo-kosztowej przedsięwzięć. W: Z prac katedry badań operacyjnych. Red. W. Sikora. UEP, Poznań 2012.

THE EFFICIENCY OF THE GENERALISED AND SPECIALISED METHODS IN THE TIME-COST ANALYSIS

Summary

The paper considers the classical problem of time-cost analysis of projects involving the minimization of the cost in the given date of completion. Two models for linear and point representation of costs were formulated. We compared the efficiency (accuracy and computation time) of three methods of solving the problem: general method, a new algorithm for extending the activities W1 and the modified Kaufmann and Desbazeille's algorithm.

Olena Sobotka

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WIELOKRYTERIALNE PORZĄDKOWANIE METODĄ PROMETHEE ODPORNE NA ZMIANY WAG KRYTERIÓW

Wprowadzenie

Wrażliwość wyników analizy wielokryterialnej na zmiany wag kryteriów, przy tym, że ważność kryteriów w wielu problemach można wyrazić najwyżej w skali porządkowej, jest problemem w wielokryterialnym wspomaganie podejmowania decyzji. Problem ten można rozpatrywać przynajmniej w trzech różnych aspektach, korzystając z następujących narzędzi analizy:

- 1) analizy wrażliwości – określenie dopuszczalnych przedziałów zmian wag, przy których wynik analizy wielokryterialnej pozostaje niezmienny,
- 2) analizy odporności wyników na zmiany wag kryteriów – poszukiwanie i analiza wyników, które sprawdzają się przy wszystkich dopuszczalnych zmianach wag,
- 3) analizy strat – wyznaczenie i porównanie strat różnych możliwych wyników w stosunku do wyniku najlepszego przy tych samych wartościach wag¹.

Celem pracy jest wyznaczenie odpornego na zmiany wag wielokryterialnego uporządkowania wariantów, będącego wynikiem analizy problemu metodą PROMETHEE². Takie odporne uporządkowanie jest częściowym uporządkowaniem na podstawie odpornych relacji dominacji.

Opisana w pracy metoda wyznaczenia odpornych relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metod PROMETHEE I i PROMETHEE II jest oparta na teorii Liniowej Częstkowej Informacji (Linear Partial Information)

¹ A. Jessop: Sensitivity and Robustness in Selection Problems. „Computers & Operations Research” 2004, Vol. 31, s. 607.

² J.P. Brans, Ph. Vincke: A Reference Ranking Organization Method (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making. „Management Science” 1985, Vol. 31, s. 647-656.

E. Koflera³ w procesie analizy wielokryterialnej na podstawie addytywnej funkcji użyteczności w warunkach niepełnej informacji o wagach kryteriów⁴.

1. Wielokryterialna analiza odporna na zmiany wag kryteriów

Przedmiotem pracy jest problem uporządkowania skończonego i przeliczalnego zbioru wariantów decyzyjnych według preferencji decydenta opisanych z pomocą kilku kryteriów. Oznaczmy przez $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ – zbiór wariantów decyzyjnych, a przez $\succsim$ (nie gorszy) – relację porządkującą zbiór A według preferencji opisanych za pomocą K kryteriów $F = \{f_1, f_2, \dots, f_K\}$. Relacja $\succsim$ jest przechodnia i na jej podstawie można zdefiniować dwie następujące relacje: $>$ (lepszy): $a_i > a_j \Leftrightarrow a_i \succsim a_j$ i $a_j \not\succsim a_i$; $\approx$ (równoważny): $a_i \approx a_j \Leftrightarrow a_i \succsim a_j$ i $a_j \succsim a_i$.

Parametrem występującym w większości sposobach modelowania wielokryterialnych preferencji jest wektor wag kryteriów. Analiza wrażliwości wyników analizy wielokryterialnej na zmiany wag kryteriów wykazała, że wyniki otrzymywane różnymi metodami są w dużym stopniu zależne od wag kryteriów. Natomiast dokładne określenie wartości wag jest dość trudnym zagadnieniem. Bardziej przyjazne i zrozumiałe jest opisanie wzajemnej ważności kryteriów w postaci np. zbioru liniowych nierówności, który określa dostępne częściowe informacje o wartościach wag kryteriów. Oznaczmy przez $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_K\}$ – wektor wag kryteriów, określony przez zbiór dopuszczalnych wartości

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^K : \sum_{k=1}^K w_k = 1 ; w_k \geq 0 \forall k ; g_t(\mathbf{w}) \geq 0, t = 1, \dots, T\} \quad (1)$$

gdzie $g_t(\mathbf{w}) \geq 0$ – liniowe warunki opisujące dostępne informacje o wagach kryteriów.

W przypadku tak określonych wag kryteriów, wynikiem analizy wielokryterialnej jest wyznaczenie takich relacji porządkujących zbiór wariantów, które zachodzą dla wszystkich dopuszczalnych kombinacji wartości wag kryteriów. Oznaczmy taką relację przez $a_i \succsim_W a_j$ (odporna relacja dominacji),

³ E. Kofler, Z.W. Kmietowicz, A.D. Pearman: Decision Making with Linear Partial Information (L.P.I.). „Journal of Operational Research Society” 1984, Vol. 35, s. 1079.

⁴ K.S. Park, S.H. Kim: Tools for Interactive Multiattribute Decision Making with Incompletely Identified Information. „European Journal of Operational Research” 1997, Vol. 98, s. 111.

co oznacza, że a_i jest niezdominowanym przez a_j według wielokryterialnych preferencji określonych przez każdy z dopuszczalnych wektorów wag kryteriów ($\forall w \in W$)

$$a_i \succcurlyeq_W a_j \Leftrightarrow \exists w \in W: a_i \succcurlyeq a_j \text{ i } \nexists w \in W: a_j \succ a_i \quad (2)$$

W przypadku spójnej relacji $\succcurlyeq$ porządkującej zbiór wariantów decyzyjnych $a_i \succcurlyeq_W a_j$ oznacza, że $a_i \succcurlyeq a_j \forall w \in W$. Natomiast jeśli relacja $\succcurlyeq$ jest niespójna i wprowadza częściowy porządek na zbiorze wariantów decyzyjnych, $a_i \succcurlyeq_W a_j$ oznacza, że $a_j \not\succ a_i \forall w \in W$.

2. Wyznaczenie odpornej relacji dominacji dla addytywnej funkcji preferencji wielokryterialnej

Niech $y(a) = \{y_1(a), y_2(a), \dots, y_K(a)\}$ – wektor ocen wariantu a według poszczególnych kryteriów.

Addytywna funkcja preferencji wielokryterialnej:

$$U(y(a)) = \sum_{k=1}^K w_k y_k(a):$$

Wariant a jest nie gorszy od wariantu b według wielokryterialnej relacji preferencji opisanej za pomocą addytywnej funkcji preferencji

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow U(y(a)) \geq U(y(b)) \quad (3)$$

K.S. Park i S.H. Kim⁵ opracowali metodę wyznaczenia relacji dominacji w warunkach niepełnej informacji o parametrach (w tym wagach kryteriów) dla przypadku tak określonej relacji preferencji wielokryterialnej. Metoda powstała na podstawie relacji dominacji statystycznej przy niepełnej informacji o prawdopodobieństwach opisanej przez P. Fishburna⁶ (1965) oraz metody porównania rozkładów prawdopodobieństwa wyników decyzji w sensie takiej relacji w przypadku parametrów zadanych przez liniowe nierówności, zaproponowanej przez Koflera i innych⁷.

⁵ K.S. Park, S.H. Kim: Op. cit.

⁶ P.C. Fishburn: Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities. „Operation Research” 1965, Vol. 13, s. 217.

⁷ E. Kofler, Z.W. Kmietowicz, A.D. Pearman: Op. cit.

Aby porównać warianty a i b według relacji preferencji określonej w postaci (3), należy rozwiązać odpowiednie zadania programowania liniowego

$$z(a, b) = \sum_{k=1}^K w_k [y_k(a) - y_k(b)] \xrightarrow{w \in W} \min \quad (4)$$

$$z(b, a) = \sum_{k=1}^K w_k [y_k(b) - y_k(a)] \xrightarrow{w \in W} \min \quad (5)$$

$\min_{w \in W} z(b, a) \leq 0$ oznacza, że istnieje dopuszczalny wektor wag kryteriów taki, że a jest nie gorszy od b według odpowiedniej funkcji wielokryterialnej preferencji ($\exists w \in W: a \succcurlyeq b$).

$\min_{w \in W} z(a, b) \geq 0$ oznacza, że nie istnieje dopuszczalny wektor wag kryteriów taki, że b jest lepszy od a według odpowiedniej funkcji wielokryterialnej preferencji ($\nexists w \in W: b \succ a$).

Wariant a jest niezdominowany przez b w sensie odpornej relacji dominacji

$$a \succcurlyeq_W b, \text{ jeśli } \min_{w \in W} z(a, b) \geq 0 \text{ i } \min_{w \in W} z(b, a) \leq 0$$

3. Wyznaczenie odpornej relacji dominacji w metodzie PROMETHEE

Opracowana przez J.P. Brans i Ph. Vincke metoda analizy wielokryterialnej PROMETHEE⁸ jest oparta na zasadach koncepcji ograniczonej racjonalności i relacji przewyższania.

Schemat analizy wielokryterialnej w metodzie PROMETHEE:

1. Porównanie wariantów według poszczególnych kryteriów za pomocą funkcji preferencji

$$P_k(a, b) = \begin{cases} H(x), & \text{jeżeli } f_k(a) > f_k(b) \\ 0, & \text{jeżeli } f_k(a) \leq f_k(b) \end{cases}, \text{ gdzie } \begin{cases} x = f(a) - f(b) \\ 0 \leq H(x) \leq 1 \end{cases}$$

2. Agregacja preferencji w postaci indeksu preferencji $\pi(a, b)$

$$\pi = \sum_{k=1}^K w_k P_k(a, b)$$

⁸ J.P. Brans, Ph. Vincke: Op. cit.

3. Porządkowanie wariantów na podstawie przepływów preferencji φ^+ i φ^-

$$\varphi^+(a) = \sum_{x \in A} \pi(a, x)$$

$$\varphi^-(a) = \sum_{x \in A} \pi(x, a)$$

Wartość $\varphi^+(a)$ jest oceną tego w jakim stopniu wariant a jest lepszy od pozostałych wariantów. Wartość $\varphi^-(a)$ jest oceną tego w jakim stopniu wariant a jest gorszy od pozostałych wariantów.

Metoda PROMETHEE I pozwala częściowo uporządkować zbiór wariantów decyzyjnych za pomocą relacji przewyższania. Wariant a jest nieprzewyższany przez wariant b

$$a \succsim_S b, \text{ jeśli } \varphi^+(a) \geq \varphi^+(b) \wedge \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b) \quad (6)$$

Jeśli wariant a jest nieprzewyższany przez wariant b i jednocześnie wariant b jest nieprzewyższany przez wariant a , to a jest równoważny z b

$$a \succsim_S b \wedge b \succsim_S a \Rightarrow a \approx b$$

Relację przewyższania przedstawia się w postaci grafu preferencji, za pomocą którego tworzy się ranking wariantów decyzyjnych (częściowe uporządkowanie).

Istnieje też wariant metody PROMETHEE II, w którym wynikiem jest pełne uporządkowanie wariantów na podstawie wartości przepływów netto $\varphi(a) = \varphi^+(a) - \varphi^-(a)$

$$a \succsim_{SII} b, \text{ jeśli } \varphi(a) \geq \varphi(b) \quad (7)$$

Ponieważ funkcję $\varphi^+(a)$, $\varphi^-(a)$ i $\varphi(a)$ są liniowe względem wag kryteriów, do wyznaczenia odpornych relacji dominacji $\succsim_W$ na podstawie relacji przewyższania wykorzystywanej w metodach PROMETHEE można wykorzystać zadania (4) i (5) i reguły opisane w poprzednim rozdziale.

W celu sprawdzenia czy zachodzi odporna relacja dominacji na podstawie relacji $\succsim_{SII}$ (7) należy rozwiązać liniowe zadania

$$\min_{w \in W} (\varphi(a) - \varphi(b)) \geq 0 \text{ oraz } \min_{w \in W} (\varphi(b) - \varphi(a)) \quad (8)$$

Wariant a jest niezdominowany przez b w sensie odpornej relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE II (7): $a \succsim_{WII} b$, jeśli

$$\min_{w \in W} (\varphi(a) - \varphi(b)) \geq 0 \text{ i } \min_{w \in W} (\varphi(b) - \varphi(a)) \leq 0 \quad (9)$$

W celu ustalenia czy zachodzi odporna relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania $\succsim_S$ należy znaleźć optymalne wartości funkcji celu następujących zadań liniowych

$$\begin{aligned} & (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) \xrightarrow{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} \min \\ & (\varphi^+(b) - \varphi^+(a)) \xrightarrow{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} \min \\ & (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) \xrightarrow{\{w \in W: \varphi^-(a) \geq \varphi^-(b)\}} \min \end{aligned} \quad (10)$$

Porównując optymalne wartości funkcji celu powyższych zadań można stwierdzić czy istnieje $\exists w \in W: a \succsim_S b$ oraz czy $\nexists w \in W: b \succ_S a$:

$$\begin{aligned} \exists w \in W: a \succsim_S b, \text{ jeśli: } \min_{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) &\geq 0 \\ \text{ i } \min_{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} (\varphi^+(b) - \varphi^+(a)) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\nexists w \in W: b \succ_S a, \text{ jeśli: } \min_{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) > 0$$

Zgodnie z (2) wariant a jest niezdominowany przez b w sensie odpornej relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE I (6)

$$a \succsim_{WI} b, \text{ jeśli } w \in W: a \succsim_S b \text{ i } \nexists w \in W: b \succ_S a$$

Procedura wyznaczenia odpornych relacji dominacji w metodzie PROMETHEE I.

1. Dla wszystkich $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ wyznaczyć:
 $\min_1(i, j) = \operatorname{argmin} (\varphi^+(a_i) - \varphi^+(a_j))$

$$\begin{aligned} & w \in W, \\ & \varphi^-(a_i) \leq \varphi^-(a_j) \end{aligned}$$

2. Dla wszystkich $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ wyznaczyć:
 $\min_2(i, j) = \operatorname{argmin} (\varphi^+(a_i) - \varphi^+(a_j))$

$$\begin{aligned} & w \in W, \\ & \varphi^-(a_i) \geq \varphi^-(a_j) \end{aligned}$$

3. Dla wszystkich $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ sprawdzić, czy zachodzi relacja $a_i \succsim_{WI} a_j$:

$$\begin{aligned} a_i \succsim_{WI} a_j, \text{ jeśli } (\min_1(i, j) \geq 0) \wedge \\ ((\min_2(i, j) > 0 \vee \text{nie istnieje}) \wedge \min_2(j, i) \leq 0) \end{aligned} \quad (11)$$

4. Przykład numeryczny

Opisany w poprzednim rozdziale sposób wyznaczenia odpornych relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE przedstawimy na przykładzie numerycznym.

Rozpatrujemy 6 wariantów $\{A, B, C, D, E, F\}$ ocenianych za pomocą 3 kryteriów, ważność kryteriów określona przez nierówności: $w_1 \geq w_2 \geq w_3$. Do analizy problemu zastosujemy metody PROMETHEE I i PROMETHEE II.

W pierwszym kroku warianty decyzyjne zostały porównane według poszczególnych kryteriów zgodnie z postępowaniem według metody PROMETHEE i zostały wyznaczone wartości funkcji preferencji dla poszczególnych kryteriów $P_k(a_i, a_j)$ przedstawione w tabelach:

$P_1(a_i, a_j)$	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0,3
B	1	0	1	1	1	1
C	0,75	0	0	0,5	0,1	1
D	0,25	0	0	0	0	0,5
E	0,65	0	0	0,4	0	0,9
F	0	0	0	0	0	0

$P_2(a_i, a_j)$	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	1	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	0	1	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0
F	1	1	1	1	1	0

$P_3(a_i, a_j)$	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0,5
C	0	0	0	0	0	0,5
D	0,5	0	0	0	0	1
E	0,5	0,5	0,5	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0

Następnie, zgodnie z procedurą opisaną w poprzednim rozdziale, zostały rozwiązane zadania programowania liniowego (10) i wyznaczone optymalne wartości funkcji celu jako wartości $\min_1(i, j)$ i $\min_2(i, j)$ odpowiednio. Optymalne wartości $\min_1(i, j)$ i $\min_2(i, j)$ są podane w tabelach („–” oznacza brak dopuszczalnego rozwiązania w odpowiednim ZPL).

Tabela 1

Wartości $\min_1(i, j)$

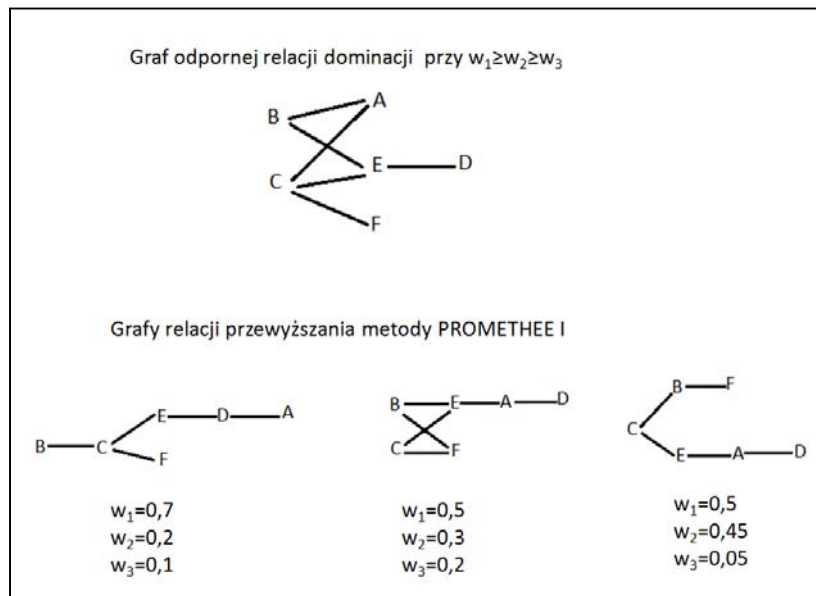
$\min_1(i, j)$	A	B	C	D	E	F
A		-1,11	–	-0,05	0,07	-0,9
B	0,75		0,99	0,75	0,64	0
C	0,86	-1,23		0,86	0,4	0,2
D	-0,18	–	–		–	-1,1
E	-0,35	-1,2	–	0,1		-1,2
F	0,87	-0,22	–	1	1,2	

$\min_2(i, j)$	A	B	C	D	E	F
A		-4,75	-2,1	-0,5	-1,7	-0,9
B	0,77		-0,2	–	0,35	0
C	–	-2,65		–	–	–
D	-0,75	-4,25	-1,8		-1,2	-1,7
E	-0,65	-3,05	-1,7	–		-1,5
F	-0,25	-5	-2,4	-0,75	-1,95	

Na podstawie wartości $\min_1(i, j)$ i $\min_2(i, j)$ zgodnie z (11) można stwierdzić, że zachodzą takie odporne relacje dominacji określone na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE I: $B \succ_{WI} A, B \succ_{WI} D, B \succ_{WI} E, C \succ_{WI} A, C \succ_{WI} D, C \succ_{WI} E, C \succ_{WI} F, E \succ_{WI} D$. Na rys. 1 przedstawiono graf odpornej relacji dominacji $\succ_{WI}$ oraz relacje przewyższania dla zadanych dopuszczalnych wartości wag kryteriów.

W celu wyznaczenia odpornych relacji dominacji określonych na podstawie relacji preferencji metody PROMETHEE II zostały rozwiązane zadania programowania liniowego (8), wartości optymalne odpowiednich funkcji celu są podane w tabeli 3.

Na podstawie wartości podanych w tabeli 3 zgodnie z (9) można stwierdzić, że zachodzą takie odporne relacje dominacji określone na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE II: $B \succ_{WII} A, B \succ_{WII} D, B \succ_{WII} E, C \succ_{WII} A, C \succ_{WII} D, C \succ_{WII} E, C \succ_{WII} F, E \succ_{WII} D$.

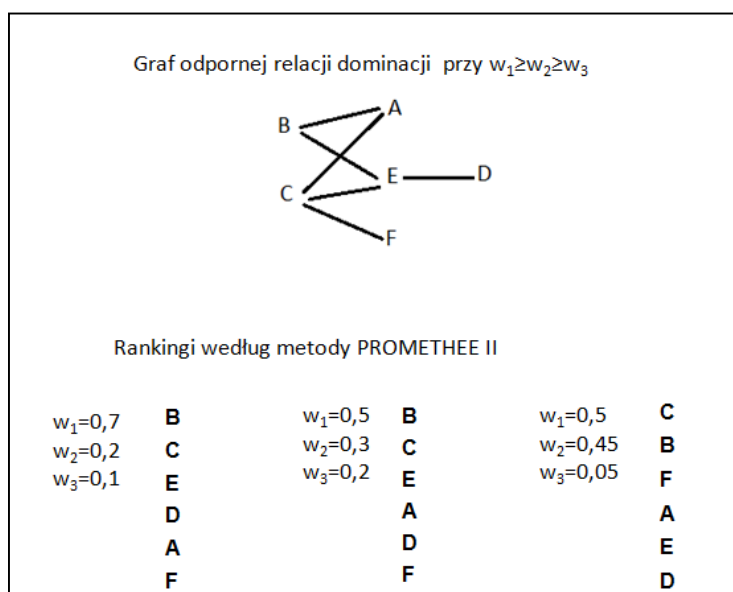


Rys. 1. Porównanie grafu odpornej relacji dominacji $\succsim_{WI}$ przy $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ do grafów relacji przewyższania $\succsim_{SI}$ dla zadanych wartości wag kryteriów

Tabela 3

Wartości $\min_{w \in W} (\varphi(a_i) - \varphi(a_j))$

	A	B	C	D	E	F
A		-7,4	-3,75	-1,25	-3,3	-0,9
B	0,7		-1,18	0,88	0,2	-0,2
C	1,58	-3,65		1,67	0,5	1
D	-1,38	-6,15	-3,25		-2	-2,3
E	-0,88	-4,15	-2,75	0,5		-1,8
F	-1,25	-8,65	-5	-2,5	-4,5	



Rys. 2. Porównanie grafu odpornej relacji dominacji $\succsim_{WII}$ przy $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ oraz rankingów na podstawie relacji przewyższania $\succsim_{SII}$ dla zadanych wartości wag kryteriów

Podsumowanie

W pracy zdefiniowano pojęcie odpornej relacji dominacji w celu przeprowadzenia analizy odporności wyników wielokryterialnego porządkowania metodą PROMETHEE. Zaproponowano metodę wyznaczenia odpornej relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metod PROMETHEE I oraz PROMETHEE II, która pozwala wyznaczyć odpowiednią relację przewyższania, które nie zmieniają się na przeciwne przy wszystkich dopuszczalnych zmianach wag kryteriów.

Literatura

- Brans J.P., Vincke Ph.: A Reference Ranking Organization Method (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making. „Management Science” 1985, Vol. 31.
- Fishburn P.C.: Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities. „Operation Research” 1965, Vol. 13.

- Jessop A.: Sensitivity and Robustness in Selection Problems. „Computers & Operations Research” 2004, Vol. 31.
- Kofler E., Kmietowicz Z.W., Pearman A.D.: Decision Making with Linear Partial Information (L.P.I.). „Journal of Operational Research Society” 1984, Vol. 35.
- Park K.S., Kim S.H.: Tools for Interactive Multiattribute Decision Making with Incompletely Identified Information. „European Journal of Operational Research” 1997, Vol. 98.

A PROMETHEE-BASED MULTICRITERIA RANKING ROBUST TO CHANGES OF CRITERIA WEIGHTS

Summary

The approach described in article is based on the Linear Partial Information (LPI) by E. Kofler. The robust multicriteria ranking is based on the robust dominance relations, which holds under all admissible combinations of criteria weights. In the article the robust dominance relation is defined and the robust ranking method based on the PROMETHEE outranking relations is proposed.

Grzegorz Tarczyński

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WIELOKRYTERIALNA OCENA PROCESU KOMPLETACJI TOWARÓW W MAGAZYNIE

Wprowadzenie

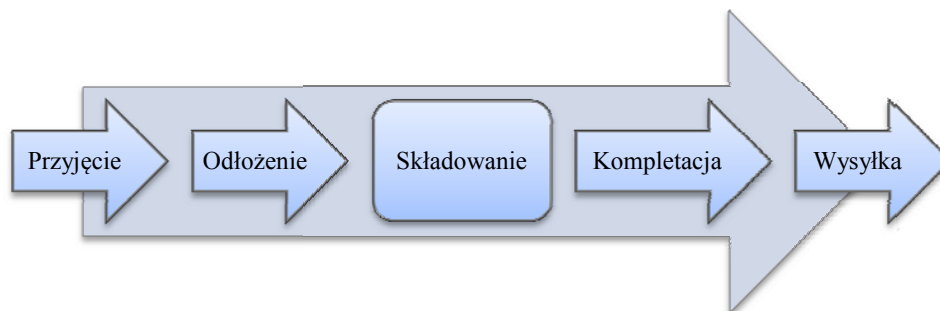
Największą część kosztów operacyjnych, związanych z magazynowaniem, przedsiębiorstwa ponoszą na proces kompletacji zamówień. W wielu opracowaniach naukowych zadanie minimalizacji kosztów kompletacji zamówień realizowane jest poprzez poszukiwanie najszybszego sposobu pobrania potrzebnych towarów. To z kolei, w przypadku kompletacji „ręcznej” typu „człowiek do towaru”, tożsame jest z optymalizacją długości trasy niezbędnej do pokonania w celu pobrania znajdujących się na liście kompletacyjnej towarów. Zagadnienie jest dobrze znane i opisane, ale i trudne, bo stanowi nieco zmodyfikowany wariant problemu komiwojażera. Problem kompletacji zamówień można jednak postrzekać wielokryterialnie. Szybsza kompletacja z jednej strony zmniejsza ogólne koszty magazynowania, z drugiej może powodować ich wzrost. Krótki czas kompletacji jest jednak wartością sam w sobie, podnosi bowiem jakość obsługi klienta.

Celem pracy jest próba znalezienia takich parametrów magazynu, które zoptymalizują kryteria oceny procesu kompletacji. Zadanie realizowane będzie poprzez stopniową eliminację rozwiązań zdominowanych i przewyższanych. Podjęta zostanie próba wyciągnięcia ogólnych wniosków odnośnie do doboru parametrów magazynu i sposobu wyznaczania trasy magazyniera.

1. Kompletacja zamówień

Uproszczona struktura procesów w węźle logistycznym obejmuje: przyjęcie, odłożenie, składowanie, kompletację i wysyłkę towarów (rys. 1). Najbardziej pracochłonnym procesem jest kompletacja towarów, która stanowi około 60% wszystkich kosztów operacyjnych w magazynie. Zdefiniować ją można jako wyszukiwanie i pobieranie z miejsc odkładczych w magazynie od-

powiednich towarów widniejących na zamówieniu złożonym przez klienta. Bartholdi i Hackman podają, że składa się na nią: przemieszczanie (zajmuje około 55% łącznego czasu kompletacji), wyszukiwanie (15%), pobranie (10%) i wydawanie (20%). Istnieje wiele sposobów realizacji zadania kompletacji, w artykule analiza zostanie ograniczona do takich czynników, jak ustalenie kształtu strefy kompletacyjnej, sposób wyznaczania tras poruszania się magazyniera oraz wpływ liczby wózków widłowych na przebieg procesu kompletacji.



Rys. 1. Uproszczona struktura procesów w węźle logistycznym

Źródło: J.J. Bartholdi, S.T. Hackman: Warehouse and Distribution Science. Georgia Institute of Technology, Atlanta 2012.

Trasa poruszania się magazyniera może być wyznaczana za pomocą jednej z 5 heurystyk¹. Istnieje również szybki algorytm pozwalający na obliczenie trasy optymalnej².

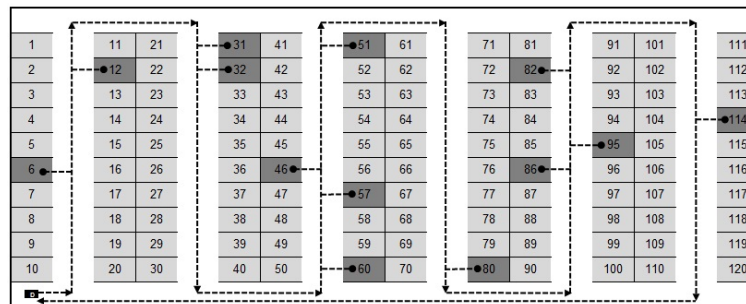
Jedną z najprostszych i bardzo popularną metodą wyznaczania trasy kompletacji zamówień jest metoda S-shape (rys. 2). W tej metodzie osoba wykonująca zadanie kompletacji wchodzi tylko do tych korytarzy, w których są towary znajdujące się na liście kompletacyjnej. Zawsze pobierane są wszystkie potrzebne towary z danego korytarza i dopiero wtedy jest on opuszczany innym końcem niż ten, przez który odbyło się wejście. Osoba kompletująca towary nigdy nie zawraca – możliwe jest to tylko po pobraniu ostatniego towaru z listy. Linia po której porusza się wózek widłowy przypomina kształtem literę S, stąd nazwa metody: S-shape.

Kolejną heurystyką często wykorzystywaną do poruszania się w magazynie podczas kompletacji zamówień jest metoda Midpoint (rys. 3). Tutaj magazyn podzielony jest na dwie części o zbliżonej wielkości i najpierw pobierane są

¹ T. Le-Duc: Design and Control of Efficient Order Picking Processes. Ph.D. Thesis, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam 2005.

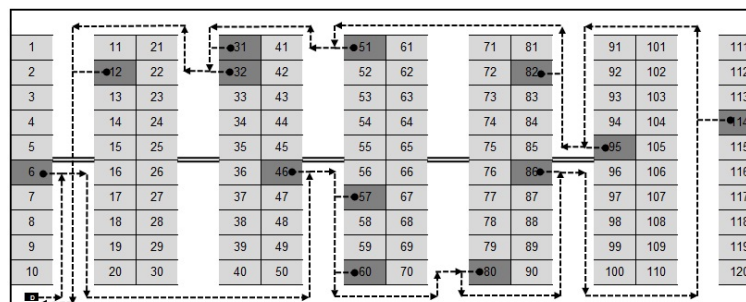
² H.D. Ratliff & A.S. Rosenthal: Order-picking in A Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem. „Operations Research” 1983, Vol. 31 (3), s. 507-521.

towary z tej części w której znajduje się punkt przyjęcia/wydania. Dopiero po pobraniu ostatniego towaru z tej części magazynu możliwe jest przekroczenie granicy i pobranie pozostałych towarów. Cechą charakterystyczną metody Midpoint jest to, że zazwyczaj po pobraniu ostatniego towaru wózek widłowy znajduje się blisko punktu przyjęcia/wydania.



Rys. 2. Przykład wyznaczania trasy metodą S-shape

Źródło: Opracowanie własne na podstawie T. Le-Duc: Design and Control of Efficient Order Picking Processes. Ph.D. Thesis, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam 2005.

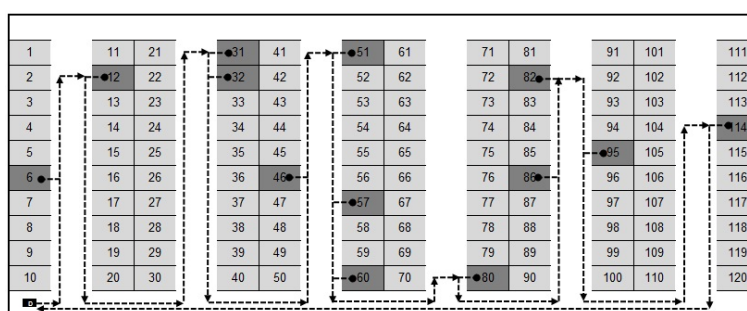


Rys. 3. Przykład wyznaczania trasy metodą Midpoint

Źródło: Ibid.

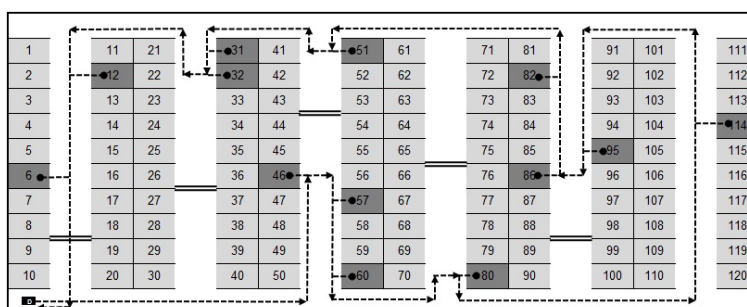
Metoda Return (rys. 4) również nie stwarza problemów z praktycznym zastosowaniem. W użyciu jest tylko jeden główny korytarz – ten, na końcu którego zazwyczaj znajduje się punkt przyjęcia/wydania. Osoba dokonująca kompletacji przemieszcza się tylko do tych korytarzy bocznych, w których znajdują się potrzebne towary, pobiera je i zawsze kieruje się do tego samego wejścia, przez które wchodziła. Drugi główny korytarz pozostaje niewykorzystany.

Pewne trudności z praktycznym zastosowaniem może sprawiać metoda Largest Gap (rys. 5). Metoda ta powstała z przekształcenia metody Midpoint. Tutaj również magazyn dzielony jest na dwie części, ale podział jest umowny: wyznaczany jest on niezależnie dla każdego zamówienia i każdego korytarza. Korytarze dzielone są w miejscu, które stanowi największy odstęp pomiędzy dwoma pobieranymi w tym korytarzu towarami albo pomiędzy końcem korytarza a najbliższym towarem, który należy pobrać. Zastosowanie metody Largest Gap gwarantuje uzyskanie co najmniej tak dobrych tras i czasów kompletacji, jak w przypadku metody Midpoint. Wyznaczenie miejsca podziału korytarzy może jednak w praktyce sprawiać pewne trudności.



Rys. 4. Przykład wyznaczania trasy metodą Return

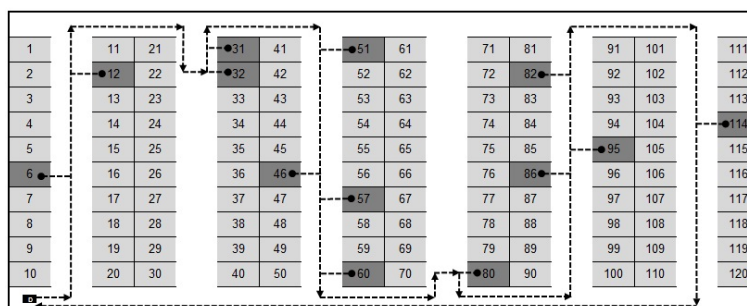
Źródło: Ibid.



Rys. 5. Przykład wyznaczania trasy metodą Largest Gap

Źródło: Ibid.

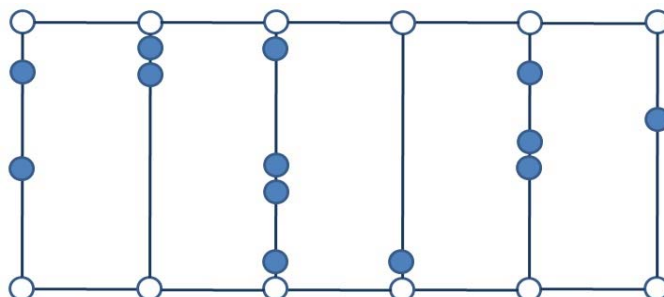
Metoda Combined (rys. 6) stanowi połączenie heurystyk S-shape i Return. Wózek widłowy wjeżdża tylko do tych korytarzy, w których znajdują się potrzebne towary, pobiera je i opuszcza korytarz najbliższym wyjściem. Droga, po której porusza się osoba kompletująca towary w niektórych korytarzach przypomina drogę dla metody S-shape, a w innych Return.



Rys. 6. Przykład wyznaczania trasy metodą Combined

Źródło: Ibid.

Problem poszukiwania najkrótszej trasy w magazynie przypomina nieco problem komiwojażera. Drobną różnicą polega na tym, że wózek widłowy może w magazynie przejechać przez pewne miejsca więcej niż jeden raz. Dla sytuacji, gdy magazyn składa się z jednego bloku (ma dwa główne korytarze) bardzo szybki algorytm na wyznaczanie trasy optymalnej podali Ratliff i Rosenthal. Zauważyli oni, że problem można zaprezentować za pomocą grafu niezorientowanego (rys. 7), którego łuki oznaczają drogę, po której może poruszać się wózek widłowy. Węzły „pełne” to miejsca, z których pobierane są towary i należy przejechać przez nie co najmniej raz. Węzły „puste” znajdują się na końcach korytarzy i można, ale nie trzeba przez nie przejeżdżać. Ratliff i Rosenthal wykazali, że przecięcie grafu pionową linią w dowolnym miejscu spowoduje podział grafu na dwa podgrafy, dla których istnieje 7 klas ekwiwalentności. Aby znaleźć najkrótszą trasę, wystarczy najpierw wyznaczyć najkrótsze trasy dla każdej klasy ekwiwalentności dla podgrafu złożonego tylko z pierwszego korytarza bocznego. Następnie dodaje się pojedynczo kolejne korytarze i bazując na optymalnych podgrafach poprzedniego poziomu dla każdej klasy ekwiwalentności wyznacza się znowu najlepsze rozwiązania. Proces kontynuuje się do korytarza, w którym znajdują się ostatnie „pełne” węzły (czyli towary do pobrania). Wówczas ze zbioru 7 grafów wybiera się graf spójny o najkrótszej trasie.

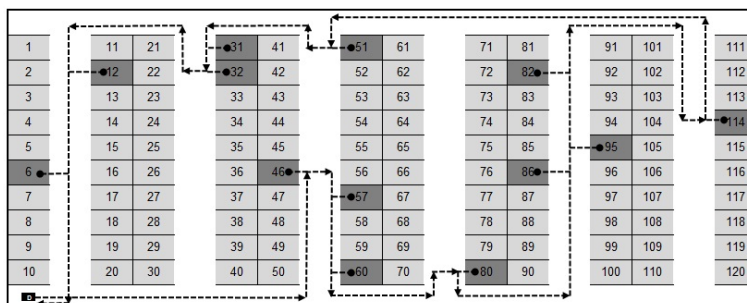


Rys. 7. Przykład grafu służącego do wyznaczenia optymalnej trasy

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: H.D. Ratliff & A.S. Rosenthal: Order-picking in A Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem. „Operations Research” 1983, Vol. 31 (3), s. 507-521.

Algorytm rozszerzony został na przypadek trzech głównych korytarzy przez Roodbergena i De Kostera, 2001. Przy większej liczbie głównych korytarzy wyznaczenie najkrótszej trasy może sprawiać pewne problemy.

Przykład trasy optymalnej znajduje się na rys. 8.



Rys. 8. Przykład wyznaczania trasy optymalnej

Źródło: Opracowanie własne na podstawie Ratliff i Rosenthal, 1983.

2. Problem kompletacji zamówień jako zadanie wielokryterialne

Kluczowym elementem wpływającym na efektywność pracy magazynu jest czas kompletacji zamówień. Wpływa on zarówno na koszty funkcjonowania magazynu, jak i jakość obsługi klientów. Dotychczasowe badania³ koncentrują się na takim rozmieszczeniu towarów w magazynie i wyznaczeniu trasy, który umożliwi wykonanie zadania kompletacji w jak najkrótszym średnim czasie. Pojawiają się dopiero pierwsze prace analizujące wpływ liczby wózków widłowych na czas realizacji zamówień czy problemy wynikające z wzajemnego blokowania się wózków widłowych⁴.

Jak zauważyli De Koster i inni⁵ czas kompletacji zamówienia jest rosnącą funkcją dystansu pokonanego przez wózek widłowy. Wydaje się więc oczywiste, że najszybciej kompletowane są zamówienia, jeśli operator wózka widłowego porusza się po najkrótszej trasie (wyznaczonej za pomocą algorytmu Ratliffa i Rosenthala). Zastosowanie w praktyce systemu wyznaczania tras optymalnych wiąże się jednak z pewnymi trudnościami. Po pierwsze, wymaga zainstalowania specjalnego komputerowego systemu wyznaczającego trasy i naprowadzającego na towary. Po drugie, De Koster i inni zwracają uwagę na częste pomyłki ludzi realizujących zadanie kompletacji. Okazuje się, że o ile hurystyki powodują, że operatorzy wózków widłowych uczą się pewnych schematów poruszania się po magazynie i po pewnym czasie postępują niemal mechanicznie, to przy metodzie optymalnej często zapominają o pobraniu towarów i muszą po nie wracać. Trasa nie tylko nie jest więc optymalna, ale czas kompletacji bywa gorszy od tego, który możliwy byłby do uzyskania przy nieomylnym zastosowaniu jednej z heurystyk.

Ogromny wpływ na czas kompletacji może też mieć kształt strefy kompletacyjnej. Jaki układ jest bardziej korzystny: niewiele regałów z dużą liczbą pól odkładczych czy może mniejsza ich liczba, ale krótszych? Jest to kolejne zagadnienie, które powinno być wzięte pod uwagę przy próbie znalezienia najlepszego sposobu kompletacji.

³ Ch.G. Petersen & R.W. Schmenner: An Evaluation of Routing and Volume-based Storage Policies in an Order Picking Operation. „Decision Sciences” 1999, Vol. 30 (2), s. 481-501.

⁴ Ch. Huber: Throughput Analysis of Manual Order Picking Systems with Congestion Consideration. Ph.D. Thesis. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe 2011; S. Hong, A.L. Johnson & B.A. Peters: Batch Picking in Narrow-Aisle Order Picking Systems with Consideration for Picker Blocking. „European Journal of Operational Research” 2012, Vol. 221, s. 557-570.

⁵ R. De Koster, T. Le Duc & K.J. Roodbergen: Design and Control of Warehouse Order Picking: A Literature Review. „European Journal of Operational Research” 2007, Vol. 182(2), s. 481-501.

Przedstawione problemy stanowią przesłankę do potraktowania kompletacji towarów jako problemu wielokryterialnego. W dalszych rozważaniach przyjęto następujące założenia:

- liczba pól odkładczych w magazynie wynosi 480,
- rozpatrywany jest magazyn prostokątny, jednoblokowy (z dwoma głównymi korytarzami),
- w magazynie jest tylko jeden poziom składowania towarów (De Koster i inni szacują, że w Europie zachodniej aż 80% magazynów to magazyny jedno-poziomowe),
- „ręczna” kompletacja typu „człowiek do towaru” (w odróżnieniu od automatycznych systemów typu AS/R).

Badaniami objęto 360 wariantów decyzyjnych (dla każdego przeprowadzono niezależne symulacje). Każdy wariant decyzyjny to inna kombinacja konfiguracji magazynu, wykorzystywanej liczby wózków widłowych oraz metody kompletacji. Parametry te przyjmowały jedną z wartości:

- konfiguracja magazynu: 48×10 , 40×12 , 32×15 , 30×16 , 24×20 , 20×24 , 16×30 , 12×40 , 10×48 , 8×60 (pierwsza liczba oznacza liczbę regałów, a druga liczbę pól odkładczych w regale),
- liczba wózków widłowych: 2, 3, 4, 5, 6, 7,
- metody wyznaczania trasy kompletacji: S-shape, Midpoint, Return, Largest Gap, Combined, optymalna.

W pracy przyjęto następujące kryteria oceny:

- średni czas realizacji jednego zamówienia,
- średni dzienny czas otwarcia magazynu,
- maksymalny dzienny czas otwarcia magazynu,
- średni dzienny czas pracy wózków widłowych,
- średnie dzienne koszty pracy magazynu (1 godz. pracy magazynu: 10 zł, 1 godz. pracy wózka widłowego: 50 zł, koszt wprowadzenia systemu wyznaczania trasy optymalnej: 100 zł/dzień),
- średni dzienny czas oczekiwania na zamówienie (bezczynności) 1 wózka widłowego,
- średni dzienny czas blokowania (mierzony z dokładnością 5min).

Czasy poruszania się wózków widłowych (tabela 1) zaczerpnięto z pracy Fijałkowskiego⁶ i własnych obserwacji⁷. Schemat rozmieszczenia regałów i punktu przyjęcia/wydania (doku) przedstawiony jest na rys. 9. Szerokość regału to 2,65 m. W analizowanym przykładzie średnia liczba towarów pobieranych podczas jednego cyklu wynosi 11.

⁶ J. Fijałkowski: Transport wewnętrzny w systemach logistycznych. Politechnika Warszawska, Warszawa 2003.

⁷ M. Jakubiak & G. Tarczyński: Selection of Manual Order Picking Concept in A Warehouse by Means of Simulation Tools. „Mathematical Economics” 2012, Vol. 8 (15), s. 47-64.

Tabela 1

Czasy poruszania się wózków widłowych

Czynność	Symbol	Jednostka	Czas (min)
Przyspieszenie po zatrzymaniu (pusty wózek)	AE	cały okres	0,0300
Przyspieszenie po zatrzymaniu (pełny wózek)	AL	cały okres	0,0300
Prędkość (3 km/h) – pełny wózek	FL	na jeden metr	0,0200
Prędkość (3 km/h) – pusty wózek	FE	na jeden metr	0,0200
Zatrzymanie (pusty wózek)	SE	cały okres	0,0200
Zatrzymanie (wózek pełen)	SL	cały okres	0,0360
Skręt w lewo (przy ruchu do przodu)	TFL	cała operacja	0,0550
Skręt w prawo (przy ruchu do przodu)	TFR	cała operacja	0,0550
Nałożenie palety na widły	NP	cała operacja	0,1333
Zeskanowanie oraz odłożenie towaru na paletę	CP	cała operacja	0,1733
Odłożenie pełnej palety na pole odkładcze	OP	cała operacja	0,2000
Ofoliowanie gotowej palety i naklejenie i wydrukowanie etykiety	OFP	cała operacja	0,3533
Zatrzymanie pełnego wózka		cała operacja	0,0360
Cofanie (0,8 m)		na 0,8 m	0,0750

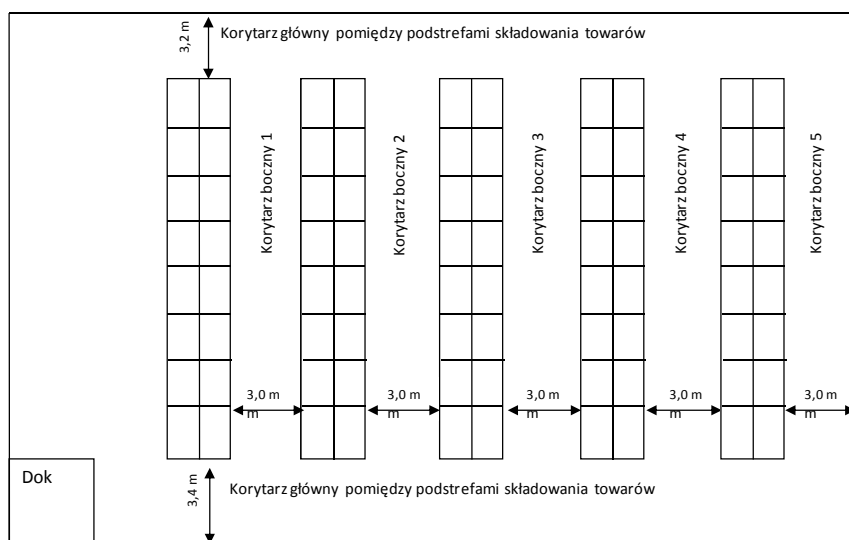
Źródło: Opracowanie własne na podstawie Fijałkowski, 2003.

Hong i inni⁸ podają dwie sytuacje, w których może dochodzić do wzajemnego blokowania się wózków widłowych w magazynach, w których korytarze są wąskie. W analizowanym przykładzie rozpatrywana będzie tylko jedna sytuacja prowadząca do blokowania. Korytarze są szerokie, do interakcji pomiędzy wózkami widłowymi dochodzi tylko wtedy, gdy jeden wózek pobiera towar, a drugi chce obok przejechać. Jest to zabronione m.in. ze względów bezpieczeństwa i operator drugiego wózka musi poczekać, aż pierwszy zakończy załadunek. Korytarze są na tyle szerokie, że gdy wózki poruszają się, bez problemów mogą się wymijać.

Dla każdego wariantu decyzyjnego przeprowadzono symulację, której wyniki posłużyły do wyznaczenia wartości kryteriów oceny. Każda symulacja obejmowała 100 replikacji (jedna replikacja to jeden dzień roboczy). Średnie czasy napływania zamówień (tabela 2) przyjęto takie, jak w pracy Jakubiaka i Tarczyńskiego⁹.

⁸ S. Hong, A.L. Johnson & B.A. Peters: Op. cit.

⁹ M. Jakubiak & G. Tarczyński: Op. cit.



Rys. 9. Schemat rozmieszczenia regałów i punktu przyjęcia/wydania

Źródło: M. Jakubiak & G. Tarczyński: Selection of Manual Order Picking Concept in A Warehouse by Means of Simulation Tools. „Mathematical Economics” 2012, Vol. 8 (15), s. 47-64.

Aby w możliwie pełny sposób odwzorować sytuację rzeczywistą, przyjęto – podobnie jak to się robi w systemach kolejkowych¹⁰ – że czas pomiędzy dwoma kolejnymi zamówieniami generowany jest z rozkładu wykładniczego (zgodnie z wartościami średnimi przedstawionymi w tabeli 2). Dla wszystkich symulacji wykorzystano ten sam punkt startowy generatora liczb pseudolosowych, więc w każdej symulacji zamówienia pojawiały się w tym samym momencie.

Tabela 2

Średni czas napływania zamówień w magazynie

Przedział czasu	Średni czas napływania zamówień
1	2
8:00-9:00	03:31
9:00-10:00	04:15
10:00-11:00	04:01

¹⁰ P.P. Bocharov, C. D’Apice, A.V. Pechinkin & S. Salerno: Queueing Theory. VSP, Utrecht-Boston 2004.

cd. tabeli 2

1	2
11:00-12:00	06:59
12:00-14:00	10:12
14:00-15:00	05:01
15:00-16:00	04:05
Cały dzień (8:00-16:00)	05:09

Źródło: M. Jakubiak & G. Tarczyński: Selection of Manual Order Picking Concept in A Warehouse by Means of Simulation Tools. „Mathematical Economics” 2012, Vol. 8 (15), s. 47-64.

De Koster i Van Der Poort¹¹ przyjmując założenie o normalnym rozkładzie czasu realizacji zamówień pokazali, że minimalna liczba symulowanych zamówień powinna wynosić około 10 000. W przeprowadzonych badaniach w ciągu 100 dni roboczych zrealizowanych zostało 9497 zamówień i pobrano 104.467 towarów.

Wszystkie obliczenia wykonano w autorskim programie Warehouse Real-time Simulator¹², działającym w środowisku MS Excel. Obliczenia przeprowadzone za pomocą symulatora, a w szczególności symulatora czasu rzeczywistego, są czasochłonne, ale jak zauważają De Koster i Van Der Poort, wyniki uzyskane w ten sposób są dokładniejsze w porównaniu z uzyskanymi poprzez zastosowanie gotowych wzorów na średni czas kompletacji zamówień przy różnych parametrach magazynu, listy kompletacyjnej i metody wyznaczania trasy magazyniera.

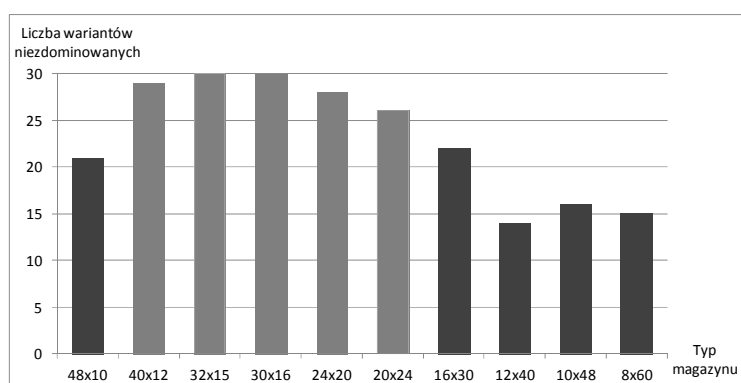
3. Wyniki symulacji

Na pierwszym etapie analizy wielokryterialnej ze zbioru wariantów decyzyjnych usunięto warianty zdominowane. 129 wariantów decyzyjnych miało wszystkie wartości kryteriów nie lepsze, a dla co najmniej jednego kryterium gorsze od innego wariantu, co stanowi 36% całkowitej liczby wariantów decyzyjnych. Najwięcej zdominowanych wariantów decyzyjnych znajdowało się w grupie magazynów z mocno niesymetryczną strefą kompletacji: 12×40 , 8×60 , 10×48 , 48×10 , 16×30 (rys. 10). Najwięcej rozwiązań odrzucono dla 7 i 6 wózków widłowych (rys. 11) oraz dla metody Return (rys. 12).

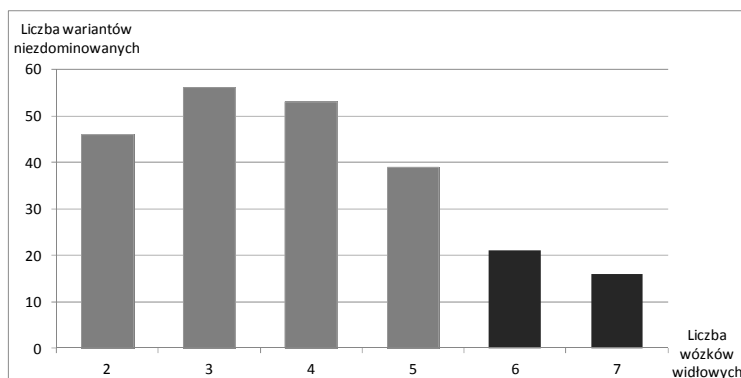
¹¹ R. De Koster & E.S. Van Der Poort: Routing Order Pickers in a Warehouse: A Comparison Between Optimal and Heuristic Solutions. „IIE Transactions” 1998, Vol. 30, s. 469-480.

¹² G. Tarczyński: Warehouse Real-Time Simulator – How to Optimize Order Picking Time. Working Paper, 2013. <http://ssrn.com/abstract=2354827>

Na rys. 13 przedstawiono dwa główne kryteria oceny wariantów decyzyjnych: średnie dzienne koszty pracy magazynu i średni czas realizacji jednego zamówienia (dla różnej liczby wózków widłowych). Z wykresu można odczytać, że znaczący spadek czasu kompletacji zamówień następuje przy zwiększaniu liczby wózków widłowych z 2 do 3 i z 3 do 4. Dodawanie kolejnych wózków widłowych nie powoduje już tak znaczącej poprawy wyników, zwiększa natomiast koszty pracy magazynu. Spadek kosztów pracy magazynu następuje przy zmniejszaniu liczby wózków widłowych: z 7 aż do 3. Dalsza redukcja liczby wózków widłowych nie poprawia już kosztów pracy magazynu.

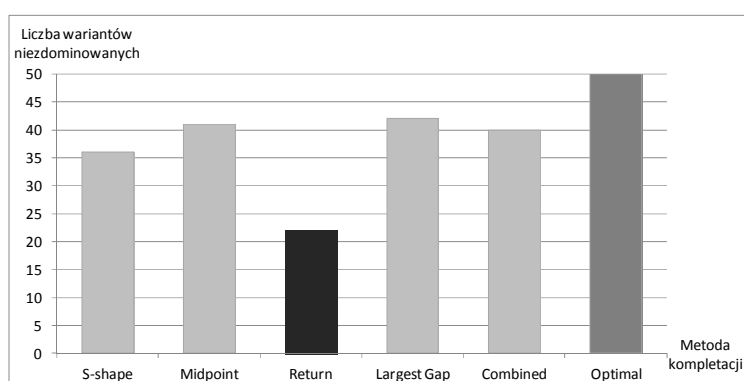


Rys. 10. Niezdominowane warianty decyzyjne dla różnych kształtów strefy kompletacyjnej

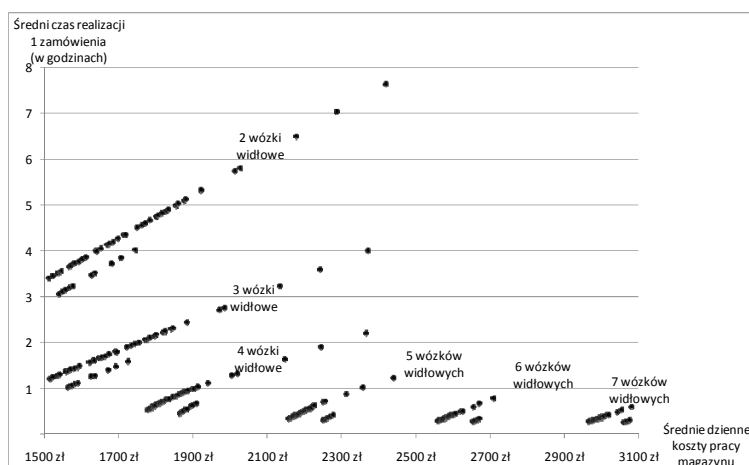


Rys. 11. Niezdominowane warianty decyzyjne dla różnej liczby wózków widłowych

W celu dalszej redukcji liczby wariantów decyzyjnych wykorzystano najprostsza z metod wielokryterialnych: Electre I. Zastosowane wagi i progi weta przedstawione są w tabeli 3. Przyjęto próg zgodności na poziomie: 0,85. Tak wysoka wartość progu zgodności powoduje, że wariant przewyższany nie może mieć gorszej wartości średniego czasu realizacji jednego zamówienia od wariantu przewyższającego. Większa (czyli gorsza) wartość jednego z dwóch kolejnych kryteriów pod względem ważności: średniego dziennego czasu otwarcia magazynu i średniego dziennego kosztu pracy magazynu powoduje, że aby wariant decyzyjny pozostał w zbiorze przewyższanych, wartości wszystkich pozostałych kryteriów muszą być nie gorsze niż dla dowolnego innego wariantu.



Rys. 12. Niezdominowane warianty decyzyjne dla różnych metod wyznaczania trasy



Rys. 13. Zależność średnich dziennych kosztów pracy magazynu od średniego czasu realizacji 1 zamówienia (dla różnej liczby wózków widłowych)

W wyniku zastosowania metody Electre I w zbiorze wariantów decyzyjnych nieprzewyższanych pozostało tylko 18 elementów (tabela 4). Całkowicie wyeliminowane zostały warianty decyzyjne zawierające magazyny typu: 8×60 , 10×48 , 32×15 , 40×12 i 48×10 . Nie pozostał również ani jeden wariant wykorzystujący jedną z metod: S-shape, Return, Combined. Nie zostały natomiast całkowicie wyeliminowane warianty z określoną liczbą wózków widłowych. Najmniej wariantów nieprzewyższanych (1) wykorzystuje 7 wózków widłowych, najwięcej (7) – sześć wózków.

Tabela 3

Wartości wag oraz progów weta dla przyjętych kryteriów oceny wariantów decyzyjnych (metoda Electre I)

Nazwa kryterium	Wagi	Progi weta
Średni czas realizacji jednego zamówienia	0,35	05:00
Średni dzienny czas otwarcia magazynu	0,15	01:00:00
Maksymalny dzienny czas otwarcia magazynu	0,1	02:00:00
Średni dzienny czas pracy wózków widłowych	0,1	03:00:00
Średnie dzienne koszty pracy magazynu	0,15	50 zł
Średni dzienny czas oczekiwania na zamówienie	0,1	01:00:00
Średni dzienny czas blokowania	0,05	05:00

Koncentrując się na dwóch najistotniejszych kryteriach: średnim czasie kompletacji jednego zamówienia i średnich dziennych kosztach pracy magazynu można spośród rozwiązań nieprzewyższanych wybrać mniejszą liczbę rozwiązań. Jeśli dla średniego czasu kompletacji zamówień przyjmiemy górną granicę na poziomie jednej godziny, a dla średniego dziennego kosztu pracy magazynu będzie to 2000 zł, to pozostaną 3 rozwiązania:

- magazyn 13×20 , 4 wózki widłowe, metoda Largest Gap,
- magazyn 16×16 , 4 wózki widłowe, metoda Largest Gap,
- magazyn 13×20 , 4 wózki widłowe, metoda optymalna.

Tabela 4

Warianty decyzyjne nieprzewyższane wraz z wartościami kryteriów oceny

Opis wariantu decyzyjnego	Kryterium 1*	Kryterium 2*	Kryterium 3*	Kryterium 4*	Kryterium 5*	Kryterium 6*	Kryterium 7*
1	2	3	4	5	6	7	8
<i>13 × 20</i> <i>2 wózki</i> <i>Largest Gap</i>	3:25:33	13:44:38	27:29:16	17:27:08	1 511,83 zł	0:10:01	1:30

cd. tabeli 4

1	2	3	4	5	6	7	8
16 × 16 2 wózki Largest Gap	3:25:30	13:44:40	27:29:21	17:26:05	1 511,90 zł	0:10:00	1:21
16 × 16 3 wózki Largest Gap	1:14:00	9:27:28	28:22:24	11:46:57	1 513,24 zł	0:54:23	2:16
13 × 20 2 wózki Optimal	3:04:47	13:04:23	26:08:46	16:37:17	1 538,04 zł	0:10:07	1:20
13 × 20 3 wózki Optimal	1:02:37	9:08:13	27:24:38	11:16:43	1 561,90 zł	1:16:46	2:24
16 × 16 4 wózki Largest Gap	0:32:52	8:27:32	33:50:08	9:07:54	1 776,36 zł	6:13:08	2:53
13 × 20 4 wózki Largest Gap	0:32:53	8:27:36	33:50:22	9:03:54	1 776,57 zł	6:12:07	3:39
13 × 20 4 wózki Optimal	0:28:42	8:24:05	33:36:18	8:58:06	1 864,26 zł	7:18:47	3:13
16 × 16 5 wózki Largest Gap	0:21:56	8:17:55	41:29:33	8:36:21	2 157,60 zł	13:41:08	3:20
13 × 20 5 wózki Optimal	0:19:57	8:16:19	41:21:33	8:32:37	2 250,68 zł	14:52:59	3:30
16 × 16 6 wózki Largest Gap	0:18:41	8:15:03	49:30:19	8:30:06	2 557,77 zł	21:29:16	3:54
13 × 20 6 wózki Largest Gap	0:18:42	8:15:16	49:31:38	8:29:42	2 558,91 zł	21:28:23	4:37
13 × 20 6 wózki Midpoint	0:19:15	8:15:48	49:34:47	8:29:41	2 561,62 zł	20:57:45	4:50
13 × 20 6 wózki Optimal	0:17:28	8:14:11	49:25:06	8:27:18	2 653,28 zł	22:44:38	3:48
11 × 24 6 wózki Optimal	0:17:36	8:14:16	49:25:35	8:26:52	2 653,69 zł	22:36:21	4:18
9 × 30 6 wózki Optimal	0:18:05	8:14:55	49:29:33	8:26:50	2 657,11 zł	22:06:26	4:41

cd. tabeli 4

1	2	3	4	5	6	7	8
7 × 40 6 wózki Optimal	0:19:08	8:15:44	49:34:25	8:27:21	2 661,31 zł	21:05:07	5:22
13 × 20 7 wózki Optimal	0:16:45	8:13:30	57:34:28	8:22:46	3 060,97 zł	30:42:07	3:57

* Kryteria: 1. Średni czas realizacji jednego zamówienia. 2. Średni czas otwarcia magazynu. 3. Średni dzienny czas pracy wózków widłowych. 4. Maksymalny czas otwarcia magazynu. 5. Średnie dzienne koszty pracy magazynu. 6. Średni dzienny czas oczekiwania na zamówienie (bezczynności) wózków widłowych. 7. Średni dzienny czas blokowania wózków widłowych.

Zastosowanie metody satysfakcjonujących poziomów kryteriów dopiero po eliminacji rozwiązań przewyższanych budzi jednak kontrowersje i w praktyce nie powinno być stosowane. W analizowanym przykładzie trzecia część analizy przeprowadzona została w celu zwrócenia szczególnej uwagi na dużą zmienność wartości najważniejszych kryteriów.

W każdym z wariantów w użyciu pozostają 4 wózki widłowe. Wykorzystywane są dwie konfiguracje magazynu i dwie metody kompletacji towarów. Wydaje się, że dla omawianego problemu wybór wariantu decyzyjnego powinien zostać ograniczony tylko do tych trzech rozwiązań. Należy jednak pamiętać, iż są sytuacje, w których jakość obsługi klienta jest najważniejsza. Skrócenie czasu kompletacji będzie wówczas celem nadrzędnym, a pozostałe kryteria zostaną pominięte lub zmarginalizowane.

Podsumowanie

Optymalizacja zadania kompletacji zamówień jest problemem wielokryterialnym, choć często analiza procesów magazynowania prowadzona jest w sposób uproszczony i ogranicza się tylko do jednego zagadnienia: wyznaczenia najkrótszej trasy wózka widłowego. Bardziej pełne ujęcie problemu, uwzględnienie częstości z jaką napływają zamówienia i liczby wózków widłowych, kształtu strefy kompletacyjnej i pewnych problemów związanych z praktycznym zastosowaniem tras optymalnych pozwala na sformułowanie wniosku, że skracanie czasu kompletacji zamówień może spowodować wzrost kosztów pracy magazynu.

W analizowanym przykładzie tylko 129 na 360 wariantów decyzyjnych (36%) było zdominowanych. Na dalszym etapie, wykorzystując metodę Electre I, usunięto rozwiązania przewyższane. Na końcu zaproponowano wybór jednego z trzech wariantów spośród 18 wariantów nieprzewyższanych.

Problem wzajemnego blokowania się wózków widłowych w omawianym przykładzie jest marginalny. Korytarze w magazynie miały wystarczającą szerokość, aby kompletacja odbywała się bezkolizyjnie. Efekt blokowania mógł występować tylko podczas pobierania towaru i powodowany był względami bezpieczeństwa.

Wartości kryteriów oceny (oprócz blokowania) dla analizowanych wariantów decyzyjnych były bardzo zróżnicowane i podejmując strategiczne decyzje o sposobie magazynowania należy je uwzględnić.

Warianty decyzyjne z magazynami o dużej liczbie krótkich regałów i o małej liczbie długich regałów wchodzą w skład zbioru rozwiązań przewyższanych. Wyznaczając strefy kompletacyjne w magazynie należy unikać takich rozwiązań.

Skrócenie czasu kompletacji zamówień, a przez to zmniejszenie kosztów funkcjonowania magazynu może się odbyć jeszcze w inny sposób: poprzez optymalizację rozmieszczenia towarów w magazynie. Choć zagadnienie to analizowane jest już od 50 lat (kluczowe znaczenie dla rozwoju tej dziedziny nauki ma praca Heskett¹³, to jest to temat wciąż aktualny i zgłębiany przez naukowców z ośrodków badawczych na całym świecie. Zagadnienie optymalizacji rozmieszczenia towarów w magazynie nie było jednak tematem tego artykułu. Problem jest na tyle szeroki, że wymaga odrębnego opracowania.

Literatura

- Bartholdi J.J., Hackman S.T.: Warehouse and Distribution Science, Georgia Institute of Technology, Atlanta 2012.
- Bocharov P.P., D'Apice C., Pechinkin A.V. & Salerno S.: Queueing Theory. VSP, Utrecht-Boston 2004.
- De Koster R., Le Duc T. & Roodbergen K.J.: Design and Control of Warehouse Order Picking: A Literature Review. „European Journal of Operational Research” 2007, Vol. 182(2).

¹³ J.L. Heskett: Cube-per-order Index – A Key to Warehouse Stock Location. „Transport and Distribution Management” 1963, Vol. 3, s. 27-31.

- De Koster R. & Van Der Poort E.S.: Routing Order Pickers in a Warehouse: A Comparison Between Optimal and Heuristic Solutions. „IIE Transactions” 1998, Vol. 30.
- Fijałkowski J.: Transport wewnętrzny w systemach logistycznych. Politechnika Warszawska, Warszawa 2003.
- Heskett J.L.: Cube-per-order Index – A Key to Warehouse Stock Location. „Transport and Distribution Management” 1963, Vol. 3.
- Hong S., Johnson A.L. & Peters B.A.: Batch Picking in Narrow-Aisle Order Picking Systems with Consideration for Picker Blocking. „European Journal of Operational Research” 2012, Vol. 221.
- Huber Ch.: Throughput Analysis of Manual Order Picking Systems with Congestion Consideration. Ph.D. Thesis. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe 2011.
- Jakubiak M. & Tarczyński G.: Selection of Manual Order Picking Concept in A Warehouse by Means of Simulation Tools. „Mathematical Economics” 2012, Vol. 8 (15).
- Le-Duc T.: Design and Control of Efficient Order Picking Processes. Ph.D. Thesis, Erasmus University Rotterdam, Rotterdam 2005.
- Petersen Ch.G. & Schmenner R.W.: An Evaluation of Routing and Volume-based Storage Policies in an Order Picking Operation. „Decision Sciences” 1999, Vol. 30 (2).
- Ratliff H.D. & Rosenthal A.S.: Order-picking in A Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem. „Operations Research” 1983, Vol. 31 (3).
- Tarczyński G.: Warehouse Real-Time Simulator – How to Optimize Order Picking Time. Working Paper, 2013. <http://ssrn.com/abstract=2354827>

MULTI-CRITERIA EVALUATION OF THE ORDER-PICKING PROCESS IN THE WAREHOUSE

Summary

This paper presents the order-picking problem as a multicriteria task. Using simulation tool 360 variants of solution were generated. The different combinations of the picking zone's shape, the number of forklift trucks and the picker-routing methods were considered. The variants were evaluated by seven criteria and the dominated solutions were removed. Then, using the Electre I method, the number of solutions was even more limited. The paper discusses and presents conclusions how to optimize the order-picking process.

Jacek Wrodarczyk

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

DWUKRYTERIALNY MODEL WYZNACZANIA STRUKTURY PRODUKCJI PRZEDSIĘBIORSTWA NA PODSTAWIE TEORII OGRANICZEŃ

Wprowadzenie

Określenie opłacalności produkcji jest jednym z ważniejszych problemów, jakie muszą rozwiązywać współcześni menedżerowie. W klasycznym ujęciu problem polega na optymalizacji struktury produkcji wobec istniejących ograniczeń przedsiębiorstwa w celu maksymalizacji zysku. Liczne obserwacje zachowań menedżerów dowodzą, że podejmując decyzje nie ograniczają się wyłącznie do analizy zyskowności poszczególnych produktów, gdyż ze względu na zmieniającą się sytuację rynkową trudno jest precyzyjnie oszacować popyt na każdy z produkowanych wyrobów. To z kolei powoduje, że starają się oni tak zaplanować produkcję, by móc w elastyczny sposób reagować na zmiany sytuacji rynkowej. W niniejszej pracy zaprezentowano model uwzględniający dwa kryteria decyzyjne – sumę przerobu wynikającą z wybranej struktury produkcji oraz ilość czasu pracy stanowisk potrzebnego do osiągnięcia tego wyniku, co ma na celu zobrazowanie relacji wyników do poniesionych nakładów. W teorii ograniczeń słowo „ograniczenie” określa zasób bądź zasoby przedsiębiorstwa, których ilość jest mniejsza niż popyt na te zasoby, czyli zasób ograniczający możliwość generowania zysku. Z uwagi na fakt, że w badaniach operacyjnych termin ten rozumiany jest odmiennie, w pracy dla oznaczenia takiego zasobu wykorzystywać będziemy określenie „waskie gardło” (bottleneck). Popyt na zasoby jest pochodną popytu na produkty. Teoria ograniczeń, stworzona przez Goldratta, izraelskiego fizyka, zaprezentowana została w książce „The Goal”¹. Zakłada ona, że każde przedsiębiorstwo posiada przynajmniej jedno ograniczenie, które limituje maksymalny możliwy do osiągnięcia zysk. Na tej podstawie

¹ E. Goldratt: The Goal Croton-on-Hudson. North River Press, New York 1984.

skonstruowane zostały pierwsze modele, pozwalające na znalezienie optymalnego rozwiązania w sytuacji, gdy w przedsiębiorstwie istnieje tylko jedno ograniczenie. Algorytm ten, zweryfikowany przez Leube i Fincha² oraz Pattersona³, przedstawiono w rozdziale 2. Niestety, w przypadku gdy istnieje więcej niż jedno ograniczenie, metoda ta daje rozwiązanie nieoptymalne lub nawet niedopuszczalne, co pokazali Balakrishan i Cheng⁴. Próbę rozwiązania problemu wyboru struktury produkcji przy występowaniu wielu ograniczeń problemu podjęli Fredendall i Lea⁵, którzy wykorzystali koncepcję „dominującego wąskiego gardła”, czyli zasobu najbardziej przeciążonego. Metoda ta przewidywała nadanie priorytetu produktom najbardziej opłacalnym, zgodnie z „dominującym wąskim gardłem”, tworząc w ten sposób wstępną strukturę produkcji, a następnie stopniowe poprawianie rozwiązania poprzez badanie sąsiednich rozwiązań. Wadą tego algorytmu jest czasochłonność obliczeń oraz wysoki stopień skomplikowania. Ponadto, jak udowodnili Aryanezhad i Komijan⁶, zastosowanie tego algorytmu nie zawsze prowadzi do uzyskania rozwiązania optymalnego. Autorzy ci zaproponowali własny algorytm opierając się na idei „dominującego wąskiego gardła”. Zrezygnowali jednak z analizy rozwiązań sąsiednich, a zamiast tego zaproponowali wykorzystanie mechanizmu tworzącego na wstępie osobne rozwiązania metodą klasyczną, po jednym dla każdego z wąskich gardel. Następnie dzięki mechanizmowi wymiany produktów w tych rozwiązaniach poprawia się wynik. Inne rozwiązanie problemu zaproponowali Aryanezhad, Komijan i Makui⁷. Zastosowali oni model liniowy do określenia zagregowanych wag produktów. Następnie zaproponowali rozważenie możliwych wymian produktów w strukturze produkcji. Obliczając wartość wzrostu lub spadku zysku wskazuje się, dla których produktów należy skorygować wielkość produkcji i w jakim stopniu. Zaprezentowany przez nich algorytm nie gwarantuje uzyskania rozwiązania optymalnego wyznaczonego za pomocą metod programowania liniowego.

² R. Leube and B. Finch: Theory of Constraints and Linear Programming: A Comparison. „International Journal of Production Research” 1992, Vol. 30(6), s. 1471-1478.

³ M.C. Patterson: The Product-mix Decision: A Comparison of Theory of Constraints and Labor-based Management Accounting. „Production and Inventory Management Journal” 1992, Vol. 33(3), s. 80-85.

⁴ J. Balakrishan and C.H. Cheng: Theory of Constraints and Linear Programming: A Re-examination. „International Journal of Production Research” 2000, Vol. 38(6), s. 1459-1463.

⁵ L.D. Fredendall and B.R. Lea: Improving the Product Mix Heuristic in the Theory of Constraints. „International Journal of Production Research” 1997, Vol. 35, s. 1535-1544.

⁶ M.B. Aryanezhad and R.A. Komijan: An Improved Algorithm for Optimizing Product Mix Under the Theory of Constraints. „International Journal of Production Research” 2004, Vol. 42, s. 4221-4233.

⁷ A.R. Komijan, M.B. Aryanezhad and A. Makui: A New Heuristic Approach to Solve Product Mix Problem in A Multi Bottleneck System. „Journal of Industrial Engineering International” 2009, Vol. 5(9), s. 46-57.

Wszystkie zaprezentowane podejścia opierają się na podstawowym założeniu maksymalizacji zysku. W praktyce gospodarczej menedżerowie rozważając rozwiązanie problemu struktury produkcji biorą pod uwagę jednak większą liczbę kryteriów niż tylko zysk w analizowanym okresie. W artykule przedstawiono model dwukryterialny, którego kryteria to maksymalizacja zysku przy minimalizacji nakładów. Kryteria te są zgodne z ogólną teorią Goldratta, który właśnie relację wykorzystania czasu pracy wąskiego gardła i przerobu traktuje jako wyznacznik opłacalności produktu. W proponowanym modelu wzięto pod uwagę także czynnik kosztu uruchomienia produkcji wyrobu oraz czas potrzebny na przezbroyenie gniazda produkcyjnego. Te istotne warunki były w przedstawianych wcześniej pracach pomijane.

W rozdziale 1 przedstawiono podstawowe założenia teorii ograniczeń oraz zaproponowaną przez Goldratta metodę wyznaczania optymalnej struktury produkcji. W rozdziale 2 – propozycję modelu dwukryterialnego do obliczenia optymalnej struktury produkcji w sytuacji, gdy liczba wąskich gardeł przekracza jeden, w 3 przeprowadzono analizę przypadku.

1. Optymalizacja struktury produkcji w ujęciu klasycznej teorii ograniczeń

Głównym założeniem modelu przedsiębiorstwa zaproponowanego przez teorię ograniczeń jest badanie wpływu wyboru konkretnych wariantów decyzyjnych na rentowność całego przedsiębiorstwa. Fakt istnienia ograniczeń, czyli czynników uniemożliwiających przedsiębiorstwu rozwój i zwiększenie sprzedaży wymusza na kadrze kierowniczej zastosowanie konkretnych narzędzi pozwalających na poprawę wydajności przedsiębiorstwa. Ten system poprawy wydajności przedsiębiorstwa został przez Goldratta nazwany „five steps of focusing”⁸. Pierwszym krokiem jest „ZIDENTYFIKUJ ograniczenie(-a) systemu” – podstawą znalezienia rozwiązania jest zdefiniowanie problemu co oznacza, że analizę przedsiębiorstwa należy rozpocząć od identyfikacji i opisanie ograniczeń. Krok drugi to „Zdecyduj, jak WYEKSPLOATOWAĆ ograniczenie(-a)” – w celu poprawy wydajności całego przedsiębiorstwa konieczne jest podjęcie działań, które pozwolą poprawić wydajność ograniczenia, przykładowo poprawić wydajność najmniej wydajnego gniazda produkcyjnego poprzez skrócenie czasu przezbroyen bądź niedopuszczanie do występowania przestojów. Poprawę wydajności można uzyskać także dzięki częściowej wstępnej

⁸ E. Goldratt: Op. cit.

obróbce detalu przed gniazdem będącym ograniczeniem. Trzeci krok to „PODPORZĄDKUJ wszystko powyższej decyzji” – z chwilą, kiedy określona została maksymalna wydajność ograniczenia należy dostroić cały proces produkcyjny do tej właśnie wydajności. Szczególnie gniazda znajdujące się przed ograniczeniem nie powinny produkować więcej niż ograniczenie jest w stanie przetworzyć, ponieważ będzie to powodowało stałe powiększanie się zapasów przed wąskim gardłem. Oczywiście należy przewidzieć odpowiedni bufor bezpieczeństwa, aby awaria maszyny pracującej przed ograniczeniem nie doprowadziła do zatrzymania produkcji na gnieździe będącym ograniczeniem. Krok czwarty określony został jako „PODNIEŚ wydajność ograniczenia” – dopiero po ustawieniu czasu cyklu produkcyjnego zgodnie z wydajnością ograniczenia można rozważać jego likwidację. Może to polegać na kolejnej zmianie produkcyjnej w gnieździe, które jest ograniczeniem lub inwestycji w kolejne urządzenie niezbędne do przeprowadzenia procesu w tym gnieździe. Ostatni krok brzmi „Jeśli w krokach 2-4 ograniczenie zostało przełamane, WRÓĆ do kroku 1; nie pozwól, by ograniczeniem stała się INERCJA”. Bardzo istotnym elementem Teorii Ograniczeń jest ciągłość procesu doskonalenia przedsiębiorstwa nazwana przez Goldratta „process of ongoing improvement”.

Zidentyfikowanie ograniczenia umożliwia ustalenie struktury sprzedaży pozwalającej na zmaksymalizowanie zysku firmy. Twórca teorii opisując sytuację przedsiębiorstwa korzysta z kilku podstawowych charakterystyk: CCR – Capacity-Constrained Resource. Jest to wydajność zasobu, który ogranicza całkowitą wydajność systemu, tzw. wąskie gardło.

1. TVC – Totally Variable Cost. Koszty, które wzrastają wraz z każdą wyprodukowaną jednostką (materiały, płaca akordowa, prowizja)

2. OE – Operating Expenses. Wszystkie wydatki, które ponosi przedsiębiorstwo niezależnie od wielkości produkcji oprócz TVC (płace oprócz stawek akordowych, energia, reklama i marketing, logistyka).

3. I – Investments. Inwestycje, nakłady ponoszone jednorazowo, pozwalające na pozytywną zmianę któregoś z pozostałych czynników (nowa, wydajniejsza maszyna, nowy kanał sprzedaży)

4. S – sales – sprzedaż wyrażona w jednostkach monetarnych.

5. T – Throughput – przerób wyrażony w jednostkach monetarnych

$$T = S - TVC$$

Przerób należy więc rozumieć jako ilość pieniędzy, które zostaną na koncie przedsiębiorstwa po sprzedaży danej grupy produktów i opłaceniu materiałów.

Teoretyczny model finansowy przedsiębiorstwa wygląda następująco⁹

$$\text{ZYSK} = \text{T} - \text{OE} - \text{I}$$

Wartość przerobu limitowana jest przez wydajność wąskiego gardła (CCR) dla ograniczeń wewnętrznych albo przez wartość popytu lub kontyngentu dla ograniczeń zewnętrznych.

Wartości wymienionych wyżej charakterystyk są łatwe do uzyskania, dzięki czemu model jest łatwy w konstrukcji, a jednocześnie pozwala na globalną analizę wariantów decyzyjnych, dzięki czytelnemu kryterium decyzyjnemu, czyli wartości zysku.

Na potrzeby analizy wariantów decyzyjnych analizowane są jedynie czasy przetwarzania konkretnych produktów na wąskim gardle (CCR).

Rozważmy przykład przedsiębiorstwa produkującego trzy wyroby: A, B i C. W przedsiębiorstwie zidentyfikowano pojedyncze gniazdo produkcyjne będące wąskim gardłem. W tabeli 1 przedstawiono koszty zmienne, jednostkowy czas wytwarzania w gnieździe będącym wąskim gardłem oraz wielkość popytu.

Tabela 1

Dane dotyczące przykładowego przedsiębiorstwa

Lp.	Produkt	Materiały koszt (TVC)	Czas CCR (min)	Popyt (szt.)
1	A	9,00 zł	2,9	100
2	B	16,00 zł	2,5	50
3	C	1,00 zł	1,2	70

Celem analizy jest nie tylko określenie, jakie ilości każdego wyrobu należy wyprodukować, ale również kolejności w jakiej produkty te powinny być wytwarzane. Chodzi o to, by produkty najbardziej opłacalne były produkowane w pierwszej kolejności tak, by jakiegokolwiek zakłócenia w pracy wąskiego gardła w najmniej dotkliwy sposób oddziaływały na wynik finansowy firmy.

Przykładowy model na podstawie założenia teorii ograniczeń przedstawiono w tabeli 2¹⁰.

⁹ T. Corbett: *Finanse do góry nogami*. MintBooks, Warszawa 2007.

¹⁰ J. Wrodarczyk: *Modelowanie działalności przedsiębiorstw produkcyjnych w oparciu o Teorię Ograniczeń*. International Dimensions in Economics Karwacka K., Łódź 2010.

Tabela 2

Model Teorii Ograniczeń

Lp.	Produkt	Koszt materiałów (TVC)	Czas CCR (min)	Popyt (szt.)	Ilość wyprodukowana (szt.)	Suma Czas (min)	Cena (S)	Przerób (T = S - TVC)	T/Czas CCR	Suma Przerobu
1	A	9,00 zł	2,9	100	100	290	20,00 zł	11,00 zł	3,79 zł	1100,00 zł
2	B	16,00 zł	2,5	50	50	125	24,00 zł	8,00 zł	3,20 zł	400,00 zł
3	C	1,00 zł	1,2	70	54	64,8	4,00 zł	3,00 zł	2,50 zł	162,00 zł
		SUMA				479,8				1662,00 zł
	Dostępny CCR:			480 min						
	CCR wolne			0,2 min			Zysk = $\sum (T * \text{Ilość}) - \text{OE}$			162,00 zł
	Koszty dzienne (OE)			1500,00 zł						

Dostępny czas pracy wąskiego gardła to 480 minut. Na pytanie, które produkty są bardziej opłacalne i które powinny być produkowane w pierwszej kolejności, aby przedsiębiorstwo osiągnęło maksymalny zysk pomaga odpowiedzieć kryterium „T/Czas CCR”. Jest to ilość pieniędzy, jakie generuje sprzedaż danego produktu w odniesieniu do jednostki czasu pracy wąskiego gardła, a co za tym idzie – całego zakładu. Im wyższa wartość tego kryterium, tym bardziej opłacalna jest produkcja danego produktu. W sytuacji gdy nie jest możliwe wyprodukowanie wszystkich produktów, na które jest popyt, przedsiębiorstwo powinno skoncentrować się na produktach o najwyższym wskaźniku „T/Czas CCR”, a w następnej kolejności wytwarzać te o mniejszej wartości wskaźnika. Oznacza to, że do rozwiązania tego problemu stworzony został wektor [A, B, C] – w pierwszej kolejności należy wykorzystać dostępne zasoby do produkcji produktu A (wartość T/Czas CCR = 3,79 zł), następnie do produkcji produktu B (wartość T/Czas CCR = 3,20 zł), a dopiero na końcu produktu C (wartość T/Czas CCR = 2,50 zł). Czasu pracy wąskiego gardła w analizowanym przykładzie wystarcza na wytworzenie 100 jednostek produktu A ($2,9 \text{ minuty} \times 100 \text{ szt.} = 290 \text{ minut}$), 50 jednostek produktu B ($2,5 \text{ minuty} \times 50 \text{ szt.} = 125 \text{ minut}$), a ponieważ pozostały czas (65 minut) pozwala na wyprodukowanie jedynie 54 jednostek produktu C, to rozwiązaniem optymalnym jest 100 jednostek produktu A, 50 jednostek produktu B, 54 jednostki produktu C. Pozostałe do dyspozycji 0,2 minuty nie wystarczą już na wytworzenie żadnego z produktów. Zysk osiągnięty z tej struktury produkcji, po odliczeniu kosztów operacyjnych (OE = 1500 zł), wyniesie 162 zł. Kolejność w jakiej produkty zostaną wytworzone ma znaczenie w sytuacji, gdy istnieje ryzyko zmniejszenia dostępnego czasu pracy wąskiego gardła. Jeżeli dostępny czas będzie mniejszy, to wytwarzanie produktów w kolejności od najbardziej do najmniej opłacalnego pozwoli zminimalizować straty. Dostępność czasu może być mniejsza m.in. z powodu awarii, złej jakości materiałów czy błędów operatora.

2. Model wielokryterialny

Dotychczas prezentowane metody rozwiązania problemu koncentrowały się na wskazaniu struktury o najwyższej opłacalności z punktu widzenia osiąganego zysku. Jednak w praktyce gospodarczej menedżerowie analizując ten problem biorą pod uwagę również inne czynniki niż tylko zysk. Biorąc pod uwagę złożoność problemu opłacalności produktów, zasadne wydaje się wykorzystanie mo-

delu wielokryterialnego do jego rozwiązania. W prezentowanym poniżej modelu autor proponuje wykorzystanie dwóch kryteriów: kryterium zysku (sumy przerobu) oraz kryterium minimalizacji czasu potrzebnego do produkcji.

Struktura proponowanego modelu

1. Zmienne:

$i = (1, 2 \dots n)$,

n – liczba produktów,

$j = (1, 2 \dots m)$,

m – liczba wąskich gardeł,

x_i – liczba sztuk produktu i znajdującego się w strukturze produkcji,

y_i – zmienna binarna określająca, czy produkcja produktu i została uruchomiona,

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i\text{-ty produkt jest wytwarzany} \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

v_i – wartość przerobu dla każdej sprzedanej jednostki produktu i ,

u_i – koszt uruchomienia produkcji produktu i ,

w_{ij} – czas wytwarzania jednostki produktu i na wąskim gardle j ,

s_{ij} – czas przebrojenia wąskiego gardła j do produkcji produktu i ,

b_i – maksymalny popyt na produkt i ,

c_j – dostępny czas pracy wąskiego gardła j .

2. Funkcje celu:

a) funkcja celu maksymalizująca zysk

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i - \sum_{i=1}^n u_i y_i \rightarrow \max$$

b) funkcja celu minimalizująca czas przetwarzania produktów na wąskich gardłach, wraz z czasami przebrojeń

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} y_i \right) \rightarrow \min$$

3. Ograniczenia:

a) ograniczenie dostępnego czasu pracy wąskich gardeł

$$\sum_{i=1}^n w_{ij}x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij}y_i \leq c_j \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \text{ oraz } j = 1, 2, \dots, m$$

b) ograniczenie popytowe

$$\frac{1}{b_i}x_i - y_i \leq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

c) $0 \leq x_i \leq b_i$, x_i – całkowite dla $i = 1, 2, \dots, n$

d) y_i jest zmienną binarną:

$$y_i \in \{0,1\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

3. Przykład numeryczny

Przyjmijmy, że przedsiębiorstwo produkuje cztery produkty: R, S, T oraz U. Popyt, cena sprzedaży, koszt materiałów przedstawione są w tabeli 3.

Tabela 3

Dane produktów w przykładzie numerycznym

Produkt	Popyt (D)	Cena (S)	Koszt materiału (TVC)	Przerób (T)	Koszt uruchomienia produkcji (U)
R	70 szt.	100 zł	20 zł	80 zł	300 zł
S	60 szt.	120 zł	60 zł	60 zł	200 zł
T	50 szt.	110 zł	60 zł	50 zł	150 zł
U	150 szt.	50 zł	20 zł	30 zł	100 zł

Przerób (T) wyznaczony został jako różnica pomiędzy ceną a kosztem materiałów dla każdego produktu.

Przedsiębiorstwo posiada siedem gniazd produkcyjnych: A, B, C, D, E, F oraz G. Czas przetwarzania każdego z produktów na każdym z gniazd produkcyjnych, maksymalną wydajność każdego z nich oraz czas pracy niezbędny do zaspokojenia całego popytu na produkty przedsiębiorstwa przedstawia tabela 4.

Tabela 4

Czasy przetwarzania produktów na gniazdach produkcyjnych

Produkt (i)	Zasób (j)						
	A	B	C	D	E	F	G
R	20	5	10	0,005	5	5	20
S	10	10	5	30	5	5	5
T	10	5	10	15	20	5	10
U	5	15	10	5	5	15	0,005
Czas dostępny (C_i)	2400	2400	2400	2400	2400	2400	2400
Wymagany czas pracy	3250	3450	3000	3300,35	2400	3150	2200,75
Różnica	-850	-1050	-600	-900,35	0	-750	199,25
Wąskie gardło?	TAK	TAK	TAK	TAK		TAK	

Z przedstawionych danych wynika, że gniazda produkcyjne A, B, C, D oraz F są wąskimi gardłami – ich dostępny czas pracy jest mniejszy niż czas potrzebny do przetworzenia wszystkich produktów, na które jest popyt. Zasób E nie jest wąskim gardłem, gdyż czas potrzebny na przetworzenie wszystkich produktów na tym zasobie jest równy czasowi dostępnemu – możliwe jest wykonanie wszystkich operacji na tym zasobie. Problem jaki należy rozwiązać to określenie struktury produkcji produktów R, S, T i U dla których suma przerobu będzie maksymalna.

Dane dotyczące czasów przebrojeń gniazd produkcyjnych będących wąskimi gardłami zaprezentowano w tabeli 5.

Tabela 5

Czasy przebrojeń produktów na gniazdach produkcyjnych

Produkt (i)	Czasy przebrojeń (s_{ij})				
	Zasób (j)				
	A	B	C	D	F
R	300	300	150	210	120
S	300	300	150	210	120
T	180	135	105	180	105
U	75	120	60	135	60

Rozwiązując zadanie programowania liniowego otrzymano następujące rozwiązanie modelu dla pierwszej funkcji celu zaprezentowano w tabeli 6.

Tabela 6

Wartości zmiennych decyzyjnych w rozwiązaniu

Produkt (i)	x_i	y_i
R	70	1
S	0	0
T	0	0
U	108	1

Analizując rozwiązanie można zauważyć, że optymalna struktura produkcji z punktu widzenia pierwszej funkcji celu (maksymalizacji przerobu) to R: 70 szt., S: 0 szt., T: 0 szt. oraz U: 108 szt. Wartość przerobu wynosi wtedy 8840 zł, koszt uruchomienia produkcji to 400 zł, z czego wynika wartość pierwszej funkcji celu 8440 zł. Wartość drugiej funkcji celu dla tego rozwiązania to 9730 roboczominut.

Aby zaprezentować rozwiązanie dla obu funkcji celu, przyjęto różne wartości dostępnego, sumarycznego czasu pracy odpowiadające liczbie pracowników zatrudnionych w zakładzie. Decyzją, jaką podejmuje menedżer nie jest jedynie określenie struktury produkcji gwarantującej maksymalny zysk. Często pod uwagę bierze się takie czynniki, jak elastyczność oraz zlecenia, na które może liczyć w przyszłości. Dlatego zasadne jest wzięcie pod uwagę wariantów decyzyjnych ograniczających zysk na rzecz innych kryteriów – w tym przypadku wykorzystania zasobów produkcyjnych.

Maksymalnie do pracy przy zasobach będących ograniczeniami zatrudnionych może być pięciu pracowników (suma 12 000 roboczominut), minimalnie jeden (2400 roboczominuty). W myśl idei maksymalizacji zysków przy jednoczesnej minimalizacji nakładów decydent powinien wybrać jedno z proponowanych rozwiązań. Jeden zatrudniony pracownik to 2400 minut dostępnego czasu pracy. Zakłada się, że przy mniejszej liczbie pracowników produkcyjnych obsługujących zasoby będące ograniczeniami równoważy się ich obciążenie metodami równoważenia linii produkcyjnej. Wyniki zaprezentowane zostały w tabeli 7.

Tabela 7

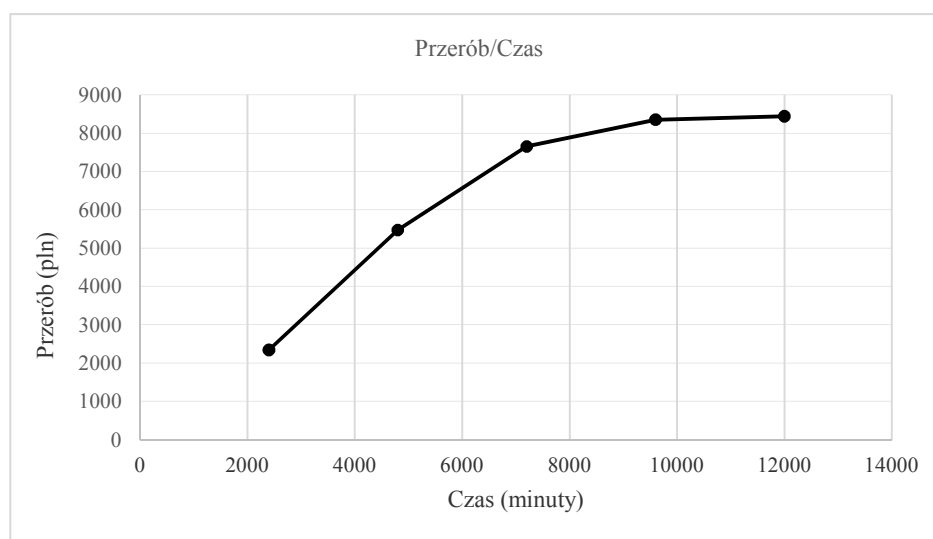
Wynik analizy dwukryterialnej

Liczba pracowników	Czas (min.)	Przerób	R	S	T	U
5	12000	8440	70	0	0	108
4	9600	8350	70	0	0	105
3	7200	7650	70	0	50	0
2	4800	5470	70	0	0	9
1	2400	2350	33	0	0	0

W zależności od maksymalnego dostępnego czasu pracy (ilości pracowników) możliwa do produkcji ilość produktów zmienia się, a co za tym idzie, zmienia się także optymalna struktura produkcji. Wynik otrzymany w formie krawędzi sprawnej przedstawiony został na wykresie 1.

Wykres 1

Wynik analizy dwukryterialnej



Przedstawiony wykres dobrze obrazuje zależność między przerobem a wykorzystanym czasem produkcji – w miarę dodawania do struktury produkcji coraz mniej opłacalnych produktów maleje zysk krańcowy uzyskiwany z minuty pracy. Ta zależność jest bardzo istotna dla menedżerów.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono dwukryterialny model pozwalający na określenie optymalnego mixu produktów w sytuacji, gdy w przedsiębiorstwie występuje więcej niż jedno wąskie gardło. Dotychczas stosowane algorytmy nie uwzględniały takich czynników działalności przedsiębiorstw produkcyjnych, jak koszt uruchomienia produkcji czy czasy przebrożeń gniazd produkcyjnych.

W dalszych pracach rozważa się rozbudowę modelu o kolejne kryteria decyzyjne, mające na celu zwiększenie przydatności modelu w praktyce gospodarczej, a także uzupełnienie o prawdopodobieństwo wystąpienia awarii i analizę wpływu takiego ryzyka na rozwiązanie.

Literatura

- Aryanezhad M.B. and Komijan R.A.: An Improved Algorithm for Optimizing Product Mix Under the Theory of Constraints. „International Journal of Production Research” 2004, Vol. 42.
- Balakrishnan J. and Cheng C.H.: Theory of Constraints and Linear Programming: A Re-examination. „International Journal of Production Research” 2000, Vol. 38(6).
- Corbett T.: *Finanse do góry nogami*. MintBooks, Warszawa 2007.
- Fredendall L.D. and Lea B.R.: Improving the Product Mix Heuristic in the Theory of Constraints. „International Journal of Production Research” 1997, Vol. 35.
- Goldratt E.: *The Goal Croton-on-Hudson*. North River Press, New York 1984.
- Goldratt E. and Fox R.: *The Race*. North River Press, New York 1986.
- Goldratt E.: *What is this Thing Called Theory of Constraints and how should it be Implemented?* North River Press, Great Barrington, Massachusetts 1990.
- Hsu T.C. and Chung S.H.: The TOC-based Algorithm for Solving Product Mix Problems. „Production Planning and Control” 1998, Vol. 9(1).
- Komijan A.R., Aryanezhad M.B. and Makui A.: A New Heuristic Approach to Solve Product Mix Problem in A Multi Bottleneck System. „Journal of Industrial Engineering International” 2009, Vol. 5(9).
- Leube R. and Finch B.: Theory of Constraints and Linear Programming: A Comparison. „International Journal of Production Research” 1992, Vol. 30(6).
- Patterson M.C.: The Product-mix Decision: A Comparison of Theory of Constraints and Labor-based Management Accounting. „Production and Inventory Management Journal” 1992, Vol. 33(3).
- Wrodarczyk J.: *Modelowanie działalności przedsiębiorstw produkcyjnych w oparciu o Teorię Ograniczeń*. International Dimensions in Economics Karwacka K., Łódź 2010.

TWO-CRITERIA MODEL OF PRODUCT MIX BASED ON THE THEORY OF CONSTRAINTS

Summary

Production structure problem, also known as product mix problem (PMP) has been in the area of interest of many researchers. Among many different ways to solve this problem, theory of constraints (TOC) is one of the more frequently chosen ones. However this solution is not universal and in some cases does not generate an optimal solution. In this paper a multi-criteria integer model has been introduced to enhance the concept. Thanks to a thorough analysis of the problem, model can be used both in the companies that have identified the one and only constraint as well as companies that characterize with multi-constraint environment.

MATEMATYCZNE MODELOWANIE RYZYKA

Donata Kopańska-Bródka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ZWIĄZKI MIAR AWERSJI DO RYZYKA Z FUNKCJAMI ZALEŻNYMI OD PARAMETRÓW ROZKŁADU

Wprowadzenie

Definicja ekonomicznej racjonalności mająca swoje źródła w teorii oczekiwanej użyteczności odzwierciedla sposób oceniania ryzykownych wariantów. Ponieważ relacja preferencji w zbiorze decyzji o losowych efektach zależy od indywidualnego profilu jednostki, zatem wartościowanie decyzji jest subiektywne. Mimo takiego ograniczenia, podejście to jest powszechnie akceptowane w ekonomii oraz finansach. Jednocześnie w praktyce decyzyjnej bardzo często stosowane są relacje preferencji wykorzystujące wartości dwóch pierwszych momentów rozkładu prawdopodobieństwa, które nie zależą od decydenta i w tym sensie są obiektywne. Zatem w ocenie losowych wariantów decyzyjnych występuje wzajemne przenikanie dwóch odmiennych sposobów ich wartościowania.

Przyjmuje się, że źródłem ryzyka jest losowość wariantów decyzyjnych, natomiast konsekwencje decyzji to realizacje zmiennych losowych. Zatem każdy ryzykowny wariant decyzyjny jest zmienną losową, której realizacje są zyskami (przyszłymi stanami posiadania, bogactwem) wyrażanymi w jednostkach monetarnych, a rozkład prawdopodobieństwa jest obiektywnym opisem decyzji. Celem analizy decyzji jest uporządkowanie zbioru możliwych decyzji, otrzymywane poprzez porównywanie poszczególnych decyzji względem pewnej relacji preferencji. Zatem w zbiorze losowych wariantów definiowana jest relacja dwuargumentowa, której własności oraz funkcyjna reprezentacja jest podstawą uporządkowania jego elementów, jak i wyodrębnienia podzbiorów wariantów

o takim samym ryzyku (indyferentnych). W literaturze najczęściej przytaczane są sposoby porządkowania wariantów na podstawie relacji zdefiniowanych w pracy Rothschilda i Stiglitz¹.

Równoważność pomiędzy definicjami relacji mniejszego ryzyka rozumiana jako zgodność otrzymywanych uporządkowań (rankingów) wariantów decyzyjnych została przeanalizowana jest przez Levy'ego².

W ekonomicznych i finansowych problemach podejmowania decyzji w warunkach niepewności dominują dwa podejścia – podejście bazujące na modelu oczekiwanej użyteczności (EU) oraz takie, w którym preferencje modelowane są funkcjami zależnymi od średniej i wariancji rozkładu (MV³). Podejście EU ma charakter subiektywny, zależy bowiem od profilu decydenta opisywanego własnościami jego funkcji użyteczności, która reprezentuje jego relację preferencji. Natomiast modele MV (modele dwóch-momentów) konstruowane są bez uwzględniania czynników behawioralnych, wymagają mniej informacji o podejmującym decyzje zatem są modelami obiektywnymi. Warunki zgodności wyborów dokonywanych w ramach powyższych metodologii są celem artykułu.

1. Relacje preferencji

Problem zgodności podejścia bazującego na zasadzie maksymalnej oczekiwanej użyteczności z podejściem wykorzystującym ocenę dwóch pierwszych parametrów rozkładu nurtował autorów od momentu, kiedy Markowitz przedstawił swój model wyboru optymalnego portfela. Najwcześniej zauważona zgodność tych dwóch metodologii odnosi się do sytuacji, kiedy funkcja użyteczności jest funkcją kwadratową lub losowe warianty decyzyjne mają rozkład normalny⁴. Badania empiryczne pokazują, że tylko w nielicznych przypadkach modele ekonomiczne opisujące rzeczywisty problem decyzyjny spełniają takie założenia. Badania prowadzone przez Mayera⁵ dotyczyły formalnych wa-

¹ M. Rothschild, J.S. Stiglitz: Increasing Risk I. A Definition. „Journal of Economic Theory” 1970, s. 225-343.

² H. Levy: Stochastic Dominance. Investment Decision Making under Uncertainty. Springer, 2006.

³ Do określenia podejścia MV (Mean – Variance) również stosowana jest symbolika (μ, σ) -model.

⁴ J.S. Chipman: The Ordering of Portfolios in Terms of Mean and Variance. „Review of Economic Study” 1973, Vol. 40(2), No. 122, s. 167-190; H. Levy, H. Markowitz: Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. „The American Economic Review” 1979, Vol. 69(3), s. 308-317.

⁵ J. Mayer: Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization. „The American Economic Review” 1987, Vol. 77(3), s. 421-430.

runków, przy których te dwa podejścia są zgodne. Również modele wykorzystujące relacje dominacji stochastycznych prezentowane m.in. w pracach Trzpiot⁶, Ogryczaka, Ruszczyńskiego⁷ analizowane są w kontekście zgodności z podejściem EU.

Przyjmuje się, że zasady wyboru są zgodne, jeśli decyzja A jest preferowana nad B w podejściu EU wtedy i tylko wtedy, gdy A jest preferowana nad B w podejściu MV. Mówiąc inaczej, uporządkowanie zbioru wariantów decyzyjnych przy zastosowaniu zasady EU jest takie samo, jak przy zasadzie MV. W teorii portfelowej zgodność rozumiana jest również jako identyczność granic efektywnych.

Problem braku zgodności preferencji omawianych podejść zilustrujmy prostym przykładem rachunkowym. Rozpatrzmy dwa losowe warianty decyzyjne dotyczące niepewnych zysków zadane następującymi dyskretnymi rozkładami:

$$D1 = \{(0; 0,8), (100; 0,2)\}$$

$$D2 = \{(10; 0,99), (1000; 0,01)\}$$

Podstawowe parametry są odpowiednio równe:

$$E(D1) = 20,8 \quad V^2(D1) = 1568,$$

$$E(D2) = 19,1 \quad V^2(D2) = 9703.$$

Ponieważ $E(D1) > E(D2)$ oraz $V^2(D1) < V^2(D2)$, to zgodnie z zasadą MV decyzja D1 jest preferowana od D2.

Założmy dalej, że profil decydenta z awersją do ryzyka opisuje logarytmiczna funkcja użyteczności $u(x) = \log(x)$. Oczekiwane użyteczności decyzji wynoszą

$$E[u(D1)] = 0,4 \quad E[u(D2)] = 1,02$$

Skoro oczekiwana użyteczność decyzji D2 jest większa od oczekiwanej użyteczności D1, więc D2 jest preferowana od D1. Przykład ten dobitnie ilustruje problem niezgodności relacji preferencji.

Formalnym warunkiem zgodności preferencji w podejściu EU i MV jest możliwość wyrażenia oczekiwanej użyteczności rzeczywistą funkcją dwóch pierwszych momentów rozkładu. Dosyć często do szacowania funkcji użyteczności za pomocą dwóch pierwszych momentów wykorzystywane jest jej rozwinięcie w szereg Taylora⁸.

⁶ G. Trzpiot: Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka. AE, Katowice 2006.

⁷ W. Ogryczak, A. Ruszczyński: Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures. „International Transaction in Operational Research” 2002, Vol. 9, s. 661-680.

⁸ H. Levy, H. Markowitz: Op. cit.

Dla dalszych rozważań przyjmijmy, że losowy wariant decyzyjny jest zmienną losową X określoną w przedziale $\langle a, b \rangle$ ⁹ o wartości oczekiwanej $E(X) = \mu$ i wariancji $D^2(X) = \sigma^2$ oraz rozkładzie zadany funkcją dystrybuanty $F(x)$. Natomiast funkcja użyteczności $u(x)$ jest ciągłą, niemalejącą i wklęsłą funkcją rzeczywistą. Osoba podejmująca decyzje preferuje wybory o mniejszej wartości σ i większej wartości μ .

Definicja 1. Relacje preferencji w podejściu EU i MV są zgodne, jeśli istnieje rzeczywista funkcja $V(\sigma, \mu)$ taka, że

$$E[u(X)] = \int_a^b u(x) dF(x) = V(\sigma, \mu) \quad (1)$$

$$\text{oraz } \frac{\partial V}{\partial \sigma} < 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \mu} > 0 \quad (2)$$

Formalne badanie zgodności sprowadza się do wskazania takich własności rozkładów lub funkcji użyteczności, dla których zachodzą warunki (1)-(2).

2. Warunki zgodności preferencji EU i VM

Badanie warunków zgodności relacji preferencji sprowadza się do poszukiwania założeń dotyczących rozkładu prawdopodobieństwa, jak i tych związanych z funkcjami użyteczności.

Warunki dotyczące klasy rozkładu prawdopodobieństwa losowych wariantów, lub też ich własności, nie zależą od indywidualnych preferencji decydenta, zatem mają charakter warunków obiektywnych, natomiast te związane z własnościami funkcji użyteczności to warunki subiektywne.

Zgodność dla klasy rozkładów normalnych

Jeśli rozkłady losowych wariantów decyzyjnych należą do klasy rozkładów normalnych $N(\mu, \sigma)$, gdzie $\sigma < c$ oraz funkcja użyteczności spełnia warunek¹⁰

$$u(x) \leq A \exp\left[-\frac{x^2}{2c^2}\right]$$

⁹ Rozważania odnoszą się również do rozkładów określonych w przedziale obustronnie otwartym (a, b) oraz $(-\infty, +\infty)$.

¹⁰ Dowód własności w pracy: J.S. Chipman: Op. cit.

to istnieje taka funkcja $V(\sigma, \mu)$, dla której

(i) zachodzi zgodność w sensie (1)-(2)

(ii) spełniony jest warunek
$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} \quad (3)$$

(iii) spełnione są warunki

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} E[u(X)] = u(\mu) \quad (4)$$

$$\lim_{(\mu, \sigma) \rightarrow (m, 0^+)} E[u(X)] = u(m) \quad (5)$$

Powyższe własności mówią nie tylko o zgodności EU z MV, ale również pokazują ciekawą zależność wyrażaną równaniem różniczkowym (3), na które często powołują się autorzy badający związki pomiędzy tymi dwoma podejściami. Rozwiązaniem równania różniczkowego (3) jest funkcja oceny dwóch pierwszych parametrów rozkładu i jest to reprezentacja funkcyjna relacji preferencji w przestrzeni (σ, μ) .

Teoretyczną siłą rozkład normalnego jest to, że jako rozkład dwuparametryczny w sposób dokładny definiowany jest za pomocą dwóch pierwszych momentów rozkładu. Zatem wartość oczekiwana dowolnej monotonicznej transformacji zmiennej losowej o rozkładzie normalnym wyrażana jest w sposób jawny za pomocą jej wartości oczekiwanej i wariancji. W szczególności funkcje użyteczności są takimi transformacjami, więc założenie normalności rozkładu gwarantuje zgodność tych dwóch podejść.

W zastosowaniach ekonomicznych popularne są funkcje typu CARA, dla których bezwzględna awersja do ryzyka jest stała. Przykładem takiej funkcji użyteczności jest funkcja wykładnicza $u(x) = -e^{-x}$. Jeśli tylko rozważane warianty decyzyjne należą do rodziny rozkładów normalnych, a preferencje decydenta wyraża funkcja wykładnicza $u(x)$, to zachodzi zgodność podejścia EU i MV oraz

$$V(\sigma, \mu) = -\exp[-(\mu - 0,5\sigma^2)] = E[u(X)]$$

W praktyce niezmiennie rzadko mamy do czynienia z normalnością rozkładu ryzykownych decyzji. Dla przykładu, rozkłady stóp zwrotu walorów notowanych na giełdach nie spełniają założenia normalności, zatem równoprawne stosowanie podejścia MV i EU nie zawsze jest uzasadnione.

Zgodność dla klasy rozkładów spełniających warunek LS

W dalszej części rozważane będą własności rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, które różnią się parametrami lokalizacji i skali (LS) co również znaczy, że dowolne dwie zmienne należące do takiej rodziny są powiązane ze sobą związkiem liniowym. Definicja rodziny rozkładów spełniających warunek LS nie zależy od rodzaju (klasy) rozkładu prawdopodobieństwa.

Definicja 2. Dwie zmienne X i $Y = \alpha + \beta X$, gdzie $\beta > 0$, spełniają warunek LS wtedy i tylko wtedy, jeśli zachodzi równość rozkładów

$$F_X(x) = F_Y(\alpha + \beta x)$$

gdzie F_X, F_Y są odpowiednio funkcjami dystrybucyjnymi zmiennej losowej X i Y .

Definicja 2 odnosi się zarówno do rozkładów ciągłych jak i dyskretnych. W szczególności można wyodrębniać rodziny rozkładów LS generowane przez wybraną zmienną X . Zmiennymi X generującymi taką rodzinę najczęściej są zmienne, dla których $E(X) = 0$ oraz $D^2(X) = 1$. Wówczas to dowolna zmienna Y spełniająca warunek LS ze zmienną X jest w liniowej zależności $Y = \mu + \sigma X$ gdzie $E(Y) = \mu$ oraz $D^2(Y) = \sigma^2$. Zatem jeśli tylko standaryzacja zmiennych zachowuje rozkład zmiennej standaryzowanej, to mamy do czynienia z rodziną LS. Spośród rozkładów dwuparametrycznych klasa rozkładów normalnych $N(\mu, \sigma)$ oraz klasa rozkładów jednostajnych na odcinku $\langle a, b \rangle$ ¹¹ (symbolicznie zapisujemy $U \langle a, b \rangle$) spełniają warunek LS.

Mayer¹² pokazał, że w zbiorze wariantów losowych spełniających warunek LS zachodzi zgodność preferencji MV i EU dla dowolnej funkcji użyteczności. Ponadto, preferencje dotyczące wyborów z rodziny LS są w pełni charakteryzowane przez wartość oczekiwaną i wariancję losowego wariantu.

W podejściu MV funkcja preferencji $V(\sigma, \mu)$ najczęściej prezentowana jest w płaszczyźnie (σ, μ) w postaci planu warstwicowego nazywanego zbiorem krzywych obojętności. Ponadto, jeśli istnieją pochodne cząstkowe funkcji $V(\sigma, \mu)$ to dla klasy rozkładów LS zachodzi następujący związek

$$V_\mu(\sigma, \mu)d\mu + V_\sigma(\sigma, \mu)d\sigma = 0$$

¹¹ Dla takiego rozkładu $E(X) = (a + b)/2$ oraz $D^2(X) = (b - a)^2/12$.

¹² J. Mayer: Op. cit.

Stopień nachylenia stycznej do krzywej obojętności określany jest za pomocą stosunku pochodnych cząstkowych

$$S(\sigma, \mu) = \frac{-V_\sigma}{V_\mu} \quad (6)$$

gdzie:

$$V_\mu = \frac{\partial V}{\partial \mu} = \int_a^b u'(\mu + \sigma x) dF(x)$$

$$V_\sigma = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \int_a^b u'(\mu + \sigma x) x dF(x)$$

Własności stopnia nachylenia $S(\sigma, \mu)$ mają ścisły związek z miarami awersji do ryzyka w podejściu EU o czym szerzej będzie w dalszej części artykułu.

Zgodność dla kwadratowej funkcji użyteczności

Wcześniej wskazano, że dla kwadratowej funkcji użyteczności i dowolnych rozkładów losowych wariantów decyzyjnych zachodzi warunek zgodności EU i MV. Oczekiwana użyteczność funkcji kwadratowej w sposób dokładny zależy od dwóch pierwszych momentów rozkładu. W pracy Johnstona i Lindleya¹³ (2011) przedstawiono formalny dowód związku MV i kwadratowej funkcji użyteczności. Przyjmując postać funkcji użyteczności $u(x) = x - ax^2$ oraz $x < a/2$ mamy związek

$$E[u(X)] = \mu - a(\mu^2 + \sigma^2)$$

zatem

$$V(\sigma, \mu) = \mu - a(\mu^2 + \sigma^2)$$

Krzywe obojętności są współśrodkowymi okręgami o środku w punkcie $(0, -a/2)$.

Kwadratowa funkcja użyteczności opisująca preferencje jednostki nie ma empirycznego uzasadnienia. Funkcja taka zdefiniowana jest tylko dla określonego przedziału argumentów, zatem zakres jej stosowalności jest ograniczony. Ponadto, decydent wartościujący efekty decyzji funkcją kwadratową charakteryzuje się rosnącą bezwzględną, jak i względną awersją do ryzyka¹⁴. W przypadku

¹³ D.J. Johnstone D.V. Lindley: Elementary Proof that Mean –Variance Implies Quadratic Utility. „Theory Decision” 2011, Vol. 70, s. 149-155.

¹⁴ Względna i bezwzględna awersja do ryzyka mierzona jest miarami Arrow-Pratta.

inwestora znaczy to, że ze wzrostem stanu posiadania (bogactwa) zmniejsza on ilość walorów ryzykownych w swoim portfelu oraz zmniejsza odsetek kapitału przeznaczany na inwestycje ryzykowne. Obserwowane w praktyce standardowe zachowanie decydenta jest przeciwne do powyższego, co znaczy, że ze wzrostem bogactwa zwiększa lub utrzymuje na tym samym poziomie ilość walorów obarczonych ryzykiem w swoim portfelu. Również odsetek kapitału przeznaczonego na decyzje ryzykowne rośnie wraz ze wzrostem bogactwa. Zatem stosowanie kwadratowej funkcji użyteczności w zastosowaniach i badaniach empirycznych jest słabością takiego podejścia. Chociaż w praktyce decyzyjnej kwadratowa funkcja użyteczności jest odrzucana ze względu na brak empirycznej weryfikacji, to jej własności zostały wykorzystane dla innych rodzajów funkcji użyteczności, które są funkcjami kwadratowymi otrzymywanymi z rozwinięcia Taylora.

3. Awersja do ryzyka w modelu EU i MV

Badanie zgodność preferencji EU z MV nie może ograniczać się tylko do poszukiwania formalnych bądź empirycznie weryfikowalnych warunków. Mając na uwadze siłę teorii EU i jej znaczenie w ekonomii, odpowiednie pojęcie i twierdzenia tej teorii powinny mieć odpowiedniki w modelu MV, a mówiąc za Mayerem, powinny być przetłumaczone na odpowiednie równoważne warunki w modelu MV. Siła teorii oczekiwanej użyteczności leży w jej jasnej i akceptowalnej definicji stosunku decydenta do ryzyka. Osoba wykazuje awersję do ryzyka, jeśli zachodzi jeden z poniższych warunków:

- preferuje wybór pewnej wypłaty x_0 niż jakiegokolwiek loterii X o wartości oczekiwanej $E(X) = x_0$,
- preferencje reprezentuje rosnąca i wklęsła funkcja użyteczności ($u'(x) > 0$ i $u''(x) < 0$),
- premia za ryzyko π jest dodatnia.

Powyższe warunki są równoważne, zatem jeśli np. krzywa funkcji użyteczności jest wklęsła, to decydent zawsze wybierze pewną inwestycję przynoszącą zysk x_0 niż inną inwestycję ryzykowną o wartości oczekiwanej x_0 . W sytuacji, kiedy w procesie decyzyjnym bez dodatkowych komentarzy mowa o decydencie z awersją do ryzyka, to zawsze jest to rozumiane w sensie powyższych definicji.

Do porównywania siły awersji do ryzyka stosowane są miary wprowadzone przez Arrowa-Pratta. Lokalna miara bezwzględnej awersji do ryzyka (absolute risk aversion) używana w teorii EU definiowana jest następująco

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

W zależności od monotoniczności tej miary mówi się o rosnącej, malejącej i stałej awersji do ryzyka. Charakter monotoniczności miary określa znak jej pierwszej pochodnej $A'(x)$, a funkcje użyteczności mogą być typu IARA (gdy $A'(x) > 0$), DARA ($A'(x) > 0$) i CARA ($A'(x) = 0$).

Problem merytoryczny powstaje wówczas, kiedy decydentowi przypisywane są własności zaczerpnięte z teorii EU, preferencje modelowane są podejściem MV oraz występuje brak zgodności MV z EU. Natomiast jeśli występuje zgodność metodologii EU i MV, a decydent korzysta z modelu (σ, μ) , wówczas pojęcia związane z awersją do ryzyka powinny mieć swoje odpowiedniki wyrażone własnościami funkcji $V(\sigma, \mu)$.

W podejściu MV stopień nachylenia stycznych do krzywych obojętności $S(\sigma, \mu)$ traktowany jest jako miara wrażliwości na ryzyko. Zatem o rosnącej (malejącej) wrażliwości mowa, jeśli $S(\sigma, \mu)$ przyjmuje wartości dodatnie (ujemne), natomiast $S(\sigma, \mu) = 0$ mówi o braku wrażliwości na ryzyko. Relacja większej awersji do ryzyka określana w teorii EU ma swój odpowiednik w podejściu MV nazywany relacją większej awersji do wariancji¹⁵.

Definicja 3. Funkcja $V_1(\sigma, \mu)$ określa większą awersję do wariancji niż funkcja $V_2(\sigma, \mu)$ jeśli dla wszystkich σ_0 i σ_1 takich, że $0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1$ i dowolnych wartości μ_0, μ_1 zachodzi implikacja

$$V_1(\sigma_0, \mu_0) \leq V_1(\sigma_1, \mu_1) \Rightarrow V_2(\sigma_0, \mu_0) \leq V_2(\sigma_1, \mu_1)$$

Korzystając z określenia miary nachylenia (6) można wykazać, że $V_1(\sigma, \mu)$ określa większą awersję do wariancji niż $V_2(\sigma, \mu)$, jeśli

$$S_1(\sigma, \mu) \geq S_2(\sigma, \mu)$$

Jeśli zachodzi zgodność preferencji EU z MV, wówczas większa awersja do wariancji jest odpowiednikiem większej awersji do ryzyka w podejściu EU.

W pracy Mayera wykazano szereg własności miar awersji do wariancji dla rodziny rozkładów LS i związków z pochodnymi funkcji użyteczności.

Założmy dalej, że zachodzi zgodność w sensie warunków (1)-(2) oraz że istnieją pochodne cząstkowe funkcji $V(\sigma, \mu)$. Dla dowolnej funkcji użyteczności $u(x)$ gdzie $E[u(X)] = V(\sigma, \mu)$ zachodzą poniższe własności:

¹⁵ F. Lajeri, L.T. Nielsen: Parametric Characterizations of Risk Aversion and Prudence. „Economic Theory” 2000, Vol. 15, s. 469-476.

Własność 1

$$u'(x) > 0 \Leftrightarrow V_{\mu}(\sigma, \mu) > 0$$

Własność 2

$$u''(x) < 0 \Leftrightarrow V_{\sigma}(\sigma, \mu) < 0$$

Własność 3

$$u''(x) < 0 \Leftrightarrow \text{funkcja } V(\sigma, \mu) \text{ jest ściśle wklęsła.}$$

Własność 4

$$A'(x) < 0 \Leftrightarrow S_{\mu}(\sigma, \mu) < 0$$

Własność 1 mówi o tym, że rosnący charakter funkcji ocen $V(\sigma, \mu)$ względem wartości oczekiwanej jest równoważny rosnącej funkcji użyteczności. Z własności 2 wnioskujemy, że jeśli tylko funkcja oceny dwóch pierwszych momentów rozkładu $V(\sigma, \mu)$ jest malejąca względem odchylenia standardowego, to jest to równoznaczne z tym, że posługująca się nią osoba ma awersję do ryzyka. W sytuacji zgodności metodologii EU i VM wklęsłość funkcji użyteczności przekłada się na wklęsłość funkcji $V(\sigma, \mu)$. Własność 4 mówi o związku pomiędzy malejącą awersją do ryzyka a malejącym nachyleniem stycznych do krzywych obojętności, jeśli poruszamy się w kierunku osi wartości oczekiwanych. Reasumując, jeśli warianty decyzyjne spełniają warunek LS, wówczas miary awersji do ryzyka definiowane w teorii EU mają swoją interpretację w metodologii MV i są wyrażane stopniem nachylenia stycznych do krzywych obojętności.

4. Zachowania rozsądne

Awersja do ryzyka łączona jest z zachowaniami określanymi mianem działań rozsądnych (roztropnych) polegających na zapobiegawczym oszczędzaniu lub ograniczaniu konsumpcji. Celem tak rozumianego oszczędzania jest zapobieganie skutkom ryzyka co do niepewnego przyszłego stanu posiadania. Rozwaga może być definiowana jako cecha osobowości związana z określonym zachowaniem w sytuacji ryzyka lub na gruncie teorii oczekiwanej użyteczności, jako wypukłość marginalnej użyteczności, co jest równoznaczne z warunkiem $u'''(x) > 0$. Określenie „rozwaga” („prudence”) w kontekście osoby z awersją do

ryzyka po raz pierwszy zostało wprowadzone przez Kimballa¹⁶, zaś predefiniowanie miar Arrowa-Pratta dało formalne podstawy teorii dotyczącej zapobiegawczych zachowań decydenta w odpowiedzi na ryzyko. Jeśli zachodzi zgodność preferencji EU i MV, to zachowania roztropne również powinny mieć swój opis w modelu (σ, μ) . Konstrukcja taka oparta jest na własności 5, która mówi, że jeśli tylko rozkłady spełniają warunek LS, to zachowania rozsądne opisuje dodatnia mieszana pochodna funkcji reprezentującej preferencje w pojęciu MV.

Własność 5

$$u'''(x) > 0 \Leftrightarrow V_{\mu\sigma}(\sigma, \mu) > 0 \quad (7)$$

Funkcja użyteczności dla której $u'''(x) > 0$ (typu DARA¹⁷) charakteryzuje decydenta, którego bezwzględna awersja do ryzyka maleje wraz ze wzrostem jego stanu posiadania. Zatem z własności 5 mamy, że dodatnia pochodna mieszana funkcji oceny $V_{\mu\sigma}(\sigma, \mu)$ jest odpowiednikiem malejącej awersji do ryzyka.

Analogicznie do bezwzględnej awersji do ryzyka $A(x)$ określona została miara bezwzględnej intensywności rozważań $AP(x)$ (absolute prudence) w następujący sposób

$$AP(x) = -\frac{u'''(x)}{u''(x)} \quad (8)$$

gdzie x jest możliwym stanem posiadania wyrażanym w jednostkach pieniężnych. Dla stanu bogactwa x wartość $AP(x)$ mierzy intensywność zapobiegawczego oszczędzania na okoliczność ryzyka.

Propozycja miary bezwzględnej rozważań w ramach metodologii MV pochodzi od Lajeri i Nielsena¹⁸ i związana jest ze stopniem nachylenia stycznych do krzywych $V_{\mu}(\sigma, \mu)$ na płaszczyźnie (σ, μ) .

Definicja 4. Miarą intensywności zachowań rozsądnych w modelu MV jest wielkość $SP(\sigma, \mu)$, gdzie

$$SP(\sigma, \mu) = \frac{-V_{\mu\sigma}(\sigma, \mu)}{V_{\mu\mu}(\sigma, \mu)} \quad (9)$$

¹⁶ M. Kimball: Precautionary Saving in the Small and in the Large. „Econometrica” 1990, Vol. 58 (1), s. 53-73.

¹⁷ Warunkiem malejącej awersji do ryzyka jest ujemność $A'(x)$ którą zapewnia $u'''(x) > 0$ (bądź wypukłość użyteczności marginalnej).

¹⁸ F. Lajeri, L.T. Nielsen: Op. cit.

Z własności 3 i 5 wynika, że $SP(\sigma, \mu) \geq 0 \Leftrightarrow AP(x) \geq 0$. Zatem miarą intensywności zachowań rozważnych jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, kiedy miara nachylenia stycznych do krzywych obojętności funkcji $V_\mu(\sigma, \mu)$ w płaszczyźnie (σ, μ) jest nieujemna.

Decydent posługujący się funkcją użyteczności $u_1(x)$ jest bardziej rozważny niż ten posługujący się $u_2(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AP_1(x) \geq AP_2(x)$$

$$\text{gdzie } AP_1(x) = -\frac{u_1'''(x)}{u_1''(x)} \quad AP_2(x) = -\frac{u_2'''(x)}{u_2''(x)}$$

Jeśli wybory dotyczą wariantów spełniających warunek LS, wówczas zachodzi zgodność oceny jednostki charakteryzującej się większą rozważą podejścia EU i MV, ponieważ

$$AP(x) \geq AP_1(x) \Leftrightarrow SP_1(\sigma, \mu) \geq SP_2(\sigma, \mu)$$

Malejąca intensywność zachowań rozważnych w metodologii EU definiowana jest ujemnym znakiem pochodnej miary $AP(x)$ ($AP'(x) < 0$). Zachowanie takie w podejściu MV charakteryzuje ujemna pochodna cząstkowa miary $SP(\sigma, \mu)$ względem wartości oczekiwanej

$$SP_\mu(\sigma, \mu) = \frac{-V_{\mu\mu}V_{\sigma\mu\mu} + V_{\sigma\mu}V_{\mu\mu\mu}}{V_{\mu\mu}^2} < 0$$

Wagener¹⁹ pokazał, że miara $SP(\sigma, \mu)$ ma takie same ekonomiczne i matematyczne własności, jak miara intensywności zachowań rozważnych $AP(x)$ w modelu teorii oczekiwanej użyteczności, zatem może być traktowana jako odpowiednik koncepcji rozważy w modelu średnia-wariancja.

¹⁹ A. Wagener: Prudence and Risk Vulnerability in Two-moment Decision Models. „Economics Letters” 2002, Vol. 74, s. 229-235.

Podsumowanie

Począwszy od prac Markowitza, Sharpe'a i Tobina preferencje bazujące na ocenie wartości oczekiwanej i wariancji odgrywają ważną rolę zarówno w teorii decyzji, jak i ekonomii finansowej. Wybory dokonywane zgodnie z zasadą średnia-wariancja są zgodne z zasadą maksymalizacji oczekiwanej użyteczności dla dowolnej funkcji użyteczności, jeśli tylko rozkłady ryzykownych decyzji spełniają warunek lokalizacji i skali. Badanie warunków zgodności relacji preferencji sprowadza się do poszukiwania obiektywnych założeń dotyczących tylko rozkładu prawdopodobieństwa lub subiektywnych, związanych z funkcjami użyteczności i ich własnościami.

W zastosowaniach modelu Markowitza do konstrukcji portfeli optymalnych często przyjmowane jest założenie, że inwestor charakteryzuje się awersją do ryzyka, wyrażaną wklęsłością funkcji użyteczności. Ponadto, bez odpowiedniej weryfikacji przyjmowane jest założenie o normalnym rozkładzie stóp zwrotu. Postępowanie takie jest dużym nadużyciem, jeśli zgodność preferencji podejścia MV z EU nie zostanie poddana weryfikacji. Modele ekonomiczne opisujące problemy decyzyjne generalnie nie spełniają warunku zgodności EU i MV. Jeśli zgodność metodologii występuje, wówczas interpretując decyzje podejmowane zgodnie z zasadami modelu MV może korzystać z charakterystyk opisu decydenta na podstawie jego funkcji użyteczności. Jeśli występuje brak zgodności, to siłę awersji do ryzyka oraz intensywność zachowań rozważnych należy opisywać miarami będącymi funkcjami średniej i wariancji.

Literatura

- Chipman J.S.: The Ordering of Portfolios in Terms of Mean and Variance. „Review of Economic Study” 1973, Vol. 40(2), No. 122.
- Johnstone D.J., Lindley D.V.: Elementary Proof that Mean –Variance Implies Quadratic Utility. „Theory Decision” 2011, Vol. 70.
- Kimball M.: Precautionary Saving in the Small and in the Large. „Econometrica” 1990, Vol. 58 (1).
- Lajeri F., Nielsen L.T.: Parametric Characterizations of Risk Aversion and Prudence. „Economic Theory” 2000, Vol. 15.
- Lajeri-Chaherli F.: Proper and Standard Risk Aversion in Two-Moment Decision Models. „Theory and Decision” 2005, Vol. 57.
- Levy H., Markowitz H.: Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. „The American Economic Review” 1979, Vol. 69(3).

- Levy H.: Stochastic Dominance. Investment Decision Making under Uncertainty. Springer, 2006.
- Mayer J.: Two-Moment Decision Models and Expected Utility Maximization. „The American Economic Review” 1987, Vol. 77(3).
- Ogryczak W., Ruszczyński A.: Dual Stochastic Dominance and Quantile Risk Measures. „International Transaction in Operational Research” 2002, Vol. 9.
- Rothschild M., Stiglitz J.S.: Increasing Risk I. A Definition. „Journal of Economic Theory” 1970.
- Trzpiot G.: Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka. AE, Katowice 2006.
- Wagener A.: Prudence and Risk Vulnerability in Two-moment Decision Models. „Economics Letters” 2002, Vol. 74.

RELATIONS OF MEASURES OF RISK AVERSION WITH THE FUNCTIONS DEPENDED ON THE PARAMETERS OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION

Summary

The expected utility model (EU) and the mean-variance model (M-V) are the most common approaches to analyzing choices under uncertainty. These two models produce the preference relations which are only consistent under additional restrictions. Although the mean-variance preferences has been important in financial economics, such a concept of risk is not consistent with others. However, the decision makers select alternatives by comparing their risk, and various risk measures are employed. The main aim of the paper is to compare various concepts of measure of risk aversion and present some conditions providing consistency in the two approaches.

Piotr Zasępa

Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

KONSTRUKCJA PŁASZCZYZNY UŚMIECHU ZMIENNOŚCI NA RYNKU WALUTOWYM

Wprowadzenie

Rynek walutowy (foreign exchange) jest największym rynkiem opcji na świecie. Podlega on dynamicznym zmianom, a modele wyceny finansowych opcji walutowych są oparte na wykorzystaniu zmienności. Obecnie można na nim zawierać różnego typu transakcje opcyjne od prostych opcji waniliowych do zaawansowanych opcji egzotycznych trzeciej generacji (produkty hybrydowe i strukturyzowane). Mimo szybkiego wzrostu popularności opcji egzotycznych, największy udział nadal mają opcje waniliowe oraz egzotyczne pierwszego rodzaju. W przypadku podstawowego modelu wyceny opcji – modelu Blacks Scholesa Mertona (BS) zmienność stosowana do wyceny opcji jest stała w czasie. Struktura terminowa zmienności tworzy tzw. płaszczyznę zmienności lub powierzchnię zmienności, dla których zmienność przybiera różne poziomy w zależności od terminu i ceny wykonania danego typu opcji. Celem artykułu jest przedstawienie konstrukcji płaszczyzny uśmiechu zmienności na rynku walutowym oraz omówienie i charakterystyka podstawowych pojęć związanych z interpolacją i ekstrapolacją notowań zmienności dla par określonych kursów walutowych.

1. Opis teoretyczny transakcji walutowych

Teoretycznie zakłada się, iż transakcją walutową jest transakcja otwierająca pozycję walutową lub mogąca wpłynąć w przyszłości na pozycję walutową inwestora. Pozycja walutowa to zobowiązanie (pozycja krótka) lub należność (po-

zycja długa) w walucie obcej. Biorąc pod uwagę transakcje walutowe należy wyróżnić: transakcję natychmiastową (kasową), która może odnosić się do trzech terminów rozliczenia zwanych datami waluty (value date): today, tomorrow i spot. Sama data spot obejmuje dwa dni robocze i jest standardową datą rozliczeniową; transakcje terminowe (forward, futures), które odnoszą się do dat późniejszych niż spot; transakcje opcyjne, które też są określane jako transakcje terminowe, aczkolwiek w tym przypadku (inaczej niż w transakcji forward oraz futures) jedna ze stron posiada prawo, a druga obowiązek zrealizowania dostawy waluty. Wśród podstawowych transakcji opcyjnych należy wskazać: europejskie opcje waniliowe, amerykańskie opcje waniliowe oraz opcje egzotyczne pierwszej, drugiej oraz trzeciej generacji¹.

Kurs walutowy XXX/YYY pokazuje, ile warta jest waluta bazowa XXX w jednostkach waluty kwotowanej YYY . Miarą kursu jest więc stosunek YYY/XXX , który oznacza ilość waluty YYY płaconej za jednostkę waluty XXX . Bieżąca wartość kursu walutowego $S_t = FOR/DOM$ oznacza ilość jednostek waluty krajowej niezbędnej do zakupu określonych jednostek waluty obcej w chwili t . W takim przypadku, jeśli $S_t = 3,0912 \text{ USD/PLN}$, to jeden USD jest wart 3,0912 PLN, gdzie PLN jest walutą krajową (kwotowaną), a USD walutą obcą (bazową).

Kontraktem terminowym nazywamy zawarte w chwili t zobowiązanie do wymiany N jednostek waluty obcej na $Nf(t, T)$ jednostek waluty krajowej w chwili T po ustalonej na początku cenie wykonania $f(t, T)$, gdzie

$$f(t, T) = \frac{S_t DF_f(t, T)}{DF_d(t, T)}$$

gdzie: $DF_f(t, T)$ – czynnik dyskontowy dla waluty kwotowanej, $DF_d(t, T)$ – czynnik dyskontowy dla waluty bazowej.

Początkowa wartość takiego kontraktu zawartego w chwili t wynosi 0 dla $(t < T)$, a wraz z upływem czasu zmienia się według następującej formuły

$$V_f(t, T) = DF_d(t, T)(f(t, T) - K) = S_t DF_f(t, T) - K DF_d(t, T)$$

gdzie K to cena wykonania kontraktu ustalona w chwili t , a wartość takiego kontraktu ustalona jest w jednostkach waluty kwotowanej.

¹ P. Mielus: Rynek opcji walutowych w Polsce. K.E. Liber, Warszawa 2002, s. 2.

Kontraktem opcyjnym typu waniliowego *call FOR* (*put DOM*) nazywamy nabycie w okresie t prawa do wymiany N jednostek waluty obcej po kursie K w z góry określonym terminie T . Wartość kontraktu opcyjnego wyliczana jest według formuły BS, dla którego dynamika kursu walutowego określona jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

gdzie: r_d – stopa procentowa (ciągła kapitalizacja) dla waluty kwotowanej, r_f – stopa procentowa (ciągła kapitalizacja) dla waluty bazowej, σ jest zmiennością, W_t – standardowy proces Browna, S jest procesem Ito postaci

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 \exp \left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + dW(t) \right) = \\ &= S(s) \exp \left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - s) + \sigma (W(t) - W(s)) \right) \text{ dla } 0 \leq s \leq t \end{aligned}$$

gdzie S_0 interpretowane jest jako cena waloru w chwili $t = 0$.

Innymi słowy proces zmiany ceny waloru jest geometrycznym ruchem Browna. Rozkład S_t w czasie T ma rozkład log-normalny. $\ln S_t$ ma rozkład normalny ze średnią $\ln S_0 = (r_d - r_f) - \frac{1}{2} \sigma^2$ i wariancją $\sigma^2 t$. Wycena walutowego kontraktu opcyjnego oparta jest na zmodyfikowanej formule BS nazywanej modelem Garmana-Kohlhagena² opublikowanym w 1982 roku

$$\begin{aligned} C &= S \exp(-rt) N(d_+) - K \exp(-Rt) N(d_-) \\ P &= K \exp(-Rt) N(-d_-) - S \exp(-rt) N(-d_+) \\ d_+ &= \frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(R - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sqrt{T} \sigma} \\ d_- &= d_+ - \sigma \sqrt{T} \end{aligned}$$

gdzie N jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego

$$N(d_+) = \int_{-\infty}^{d_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - N(-d_+)$$

² M.B. Garman, S.W. Kohlhagen: Foreign Currency Option Values. „Journal of International Money and Finance” 1983, Vol. 2, s. 231-237.

C – cena opcji call (w walucie kwotowanej), P – cena opcji put (w walucie kwotowanej), S – kurs spot (w notacji waluta bazowa/waluta kwotowana), K – kurs realizacji (w notacji waluta bazowa/waluta kwotowana), σ – zmienność, R – oprocentowanie waluty kwotowanej (kapitalizacja ciągła), r – oprocentowanie waluty bazowej (kapitalizacja ciągła), t – czas swapowy, T – czas stochastyczny. W walucie bazowej wartość kontraktu może być wyrażona jako $\frac{C}{S_t}$. Waluta w której wyrażana jest premia kontraktu nazywana jest premium currency. Opcja o kursie realizacji równym kursowi terminowemu o dacie rozliczenia tożsamej z datą dostawy kontraktu opcyjnego nazywana jest opcja ATM (at the money). Wartość wewnętrzna opcji (intrinsic value) to różnica pomiędzy kursem terminowym a kursem realizacji w sytuacji, kiedy kurs realizacji jest korzystniejszy od kursu terminowego. Opcja posiadająca wartość wewnętrzną nazywana jest opcją ITM (in the money). Opcja o zerowej wartości wewnętrznej nazywana jest opcją OTM (out of the money). Należy stwierdzić, iż definicja walutowej opcji ATM nie jest jednoznaczna. Wśród konwencji w zależności od ceny wykonania K wyróżniamy następujące delty: *ATM spot*, dla $K = S_0$, $\text{delta call} = -\text{delta put}$ (delta parity), *ATM forward*, dla $K = f$, *ATM-value-neutral*, dla K , takiego że wartość V opcji call = V wartości opcji put (value parity), *ATM- Δ -neutral*, dla K , takiego, że Δ opcji call = Δ opcji put (delta parity).

Z parytetu opcji put-call wynika, że *ATM-value-neutral* jest równa *ATM forward*. Symetrię kurów walutowych w kontekście zmienności można określić następującą formułą: $\frac{1}{S} v(S, K, T, t, \sigma, r_d, r_f, \emptyset) = K v\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{K}, T, t, \sigma, r_d, r_f - \emptyset\right)$. Z równania wynika, iż wartość opcji może być obliczona w walucie bazowej lub kwotowanej. Można rozważyć opcję na EUR/USD. Na giełdzie w Nowym Jorku będzie ona kosztować $v(S, K, T, t, \sigma, r_{USD}, r_{EUR}, 1)$ USD i dlatego jej wartość w EUR wyniesie $v\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{K}, T, t, \sigma, r_{EUR}, r_{USD}, -1\right) / S$. Ta opcja *EURcall* może być również rozważana jako opcja *USDput* w wypłatą $K\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{S_T}\right)^+$. Wartość tej opcji wynosi $K v\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{K}, T, t, \sigma, r_{EUR}, r_{USD}, -1\right)$ euro na giełdzie we Frankfurcie dlatego, iż S_t i mają taką samą zmienność. Wartość opcji na obu rynkach musi być taka sama i powinna być kwotowana przy tej samej zmienności. W przeciwnym wypadku istnieje możliwość przeprowadzenia arbitrażu.

2. Analiza zmienności kuru walutowego

Podmioty zaangażowane na rynku opcji walutowych podejmują decyzje inwestycyjne na podstawie oczekiwanego zakresu zmienności stóp zwrotu kursu walutowego. Zmienność (volatility) jest jedynym parametrem kształtowanym na rynku pochodnym, a nie na rynku instrumentu bazowego³. Prognozowanie i określenie poziomu zmienności implikowanej określonej przez rynek i jego uczestników jest podstawowym zadaniem dla uczestników rynku opcji walutowych. Wpływa ona bowiem na poziom i charakter zabezpieczeń przyszłych przepływów walutowych lub ich portfela. W inżynierii finansowej możemy wskazać następujące rodzaje zmienności: zmienność historyczną (historical volatility), zmienność implikowana lub rynkowa (implied volatility), zmienność lokalna (local volatility), zmienność stochastyczna (stochastic volatility).

Zmienność historyczna to zaanualizowane odchylenie standardowe logarytmicznej stopy zwrotu z ceny danego aktywa S . Z procesu stochastycznego wynika, że: $S_t = S_0 \exp \left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)$.

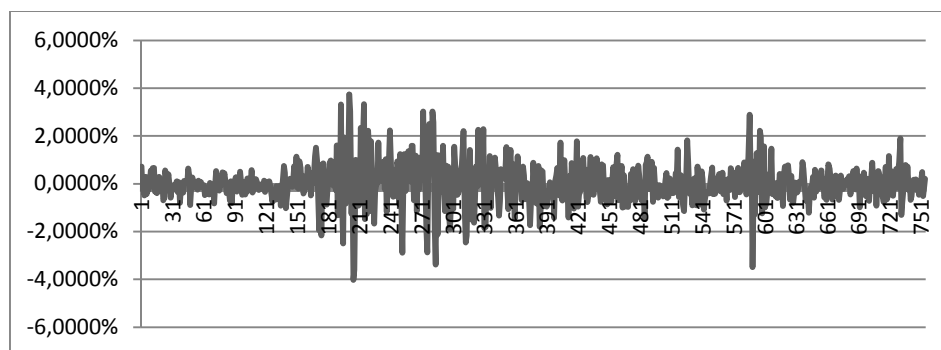
Z powyższego równania wynika, że $VAR(\ln(\frac{S_t}{S_0})) = \sigma^2 t$. Obliczenie zmienności rynkowej stosowanej do wyceny opcji w modelu Garmana-Kohla-gena wymaga małej modyfikacji formuły. Oblicza się najczęściej zmienność w skali jednego dnia i następnie skaluje się ją do zmienności rocznej następującym wzorem: $\hat{\sigma} = \sqrt{252} \sigma_{1d}$. Liczba 252 wynika z tego, iż rok ma około 252 dni handlowych, która to liczba zależy od kraju waluty. W praktyce analizuje się szeregi czasowe niezawierające świąt i weekendów. Wyznaczenie zmienności historycznej jest jedynie podstawą do dalszego prognozowania zmienności. Ponadto, istnieje wiele modeli szacowania zmienności implikowanej. Wśród najpopularniejszych należy wymienić modele średniej ruchomej EWMA lub modele typu GARCH.

Zmienność implikowana to liczba, która spełnia równanie formuły BS dla określonej ceny opcji. Liczba ta kalibruje formułę BS dla opcji o czasie trwania T i cenie wykonania K . Analizując wykres 1 należy stwierdzić, iż w logarytmicznych stopach zwrotu występuje efekt skupienia danych, wysokie prawdopodobieństwo wystąpienia bardzo dużych odchyleń od średniej, skośność rozkładu oraz niestałość wariancji w czasie.

³ Ibid., s. 79.

Wykres 1

Logarytmiczne stopy zwrotu pary walutowej EUR/PLN
dla okresu 01.01.2008-31.01.2010



Źródło: Dane kursu walutowego Narodowego Banku Centralnego.

Zmienność lokalna to detreministyczna (niestochastyczna) funkcja $\sigma = \sigma(s, t)$, która występuje w równaniu opisującym proces S_t cen instrumentu bazowego. $dS_t = r(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t$. Zmienność stochastyczna (stochastic volatility) to model, w którym proces cen jest opisany równaniem: $dS_t = r(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t$, gdzie tym razem $\sigma = \sigma(s, t)$, jest wielkością stochastyczną, taką że proces wariancji: $V = \sigma^2$, spełnia równanie: $dV_t = \mu(V_t, S_t, t)dt + v(V_t, S_t, t)d\widehat{W}_t$. Dla pewnych funkcji μ i v . Zakłada się również, że procesy Wienera W_t i $\widehat{W}_t$ są skorelowane, w tym sensie, że $E(dW_t, d\widehat{W}_t) = \rho dt$. Pierwszymi modelami poruszającymi problematykę zmienności stochastycznej były: Model Hulla i White'a⁴, Model Hestona⁵.

3. Struktura czasowa zmienności

Analizując zmienność historyczną można stwierdzić, iż jej poziom ulega ciągłym wahaniom, co jest sprzeczne z założeniami modelu BS. Struktura czasowa zmienności to krzywa odnosząca się do poszczególnych przedziałów czasowych zmienności. Może ona być tożsama ze strukturą terminową stóp

⁴ J.C. Hull, A. White: The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities. „Journal of Finance” 1997, Vol. 42, s. 281-300.

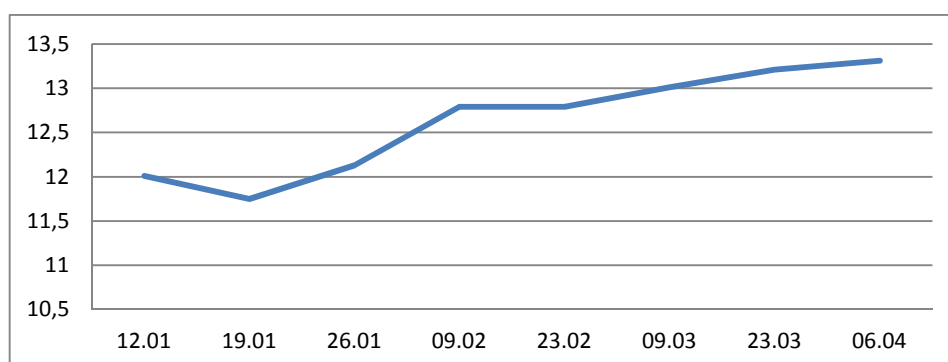
⁵ S.L. Heston: A Closed form Solution for Option with Stochastic Volatility with Application for Bonds and Currency Options. „Review of Financial Studies” 1993, Vol. 6, s. 327-344.

zwrotu. Możemy wyróżnić następujące kształty omawianej krzywej: rosnący, stały, malejący oraz niemonotoniczny. Tylko ta druga struktura jest zgodna z założeniami BS, a pozostałe zakładają zmienność zmienności w czasie. Tak jak w przypadku stóp procentowych na normalnym rynku im dłuższy okres do zapadalności opcji, tym zmienność powinna być wyższa. Posiadając dane dotyczące struktury czasowej zmienności można dość szybko oszacować terminową zmienność za pomocą następującego wzoru

$$VOL_{1,2} = \sqrt{\frac{(VOL_{0,2})^2 * T_{0,2} - (VOL_{0,1})^2 * T_{0,1}}{T_{1,2}}}$$

Wykres 2

Terminowa struktura zmienności dla EUR/USD dla opcji ATM
01.01.2011



Źródło: Dane Domu Maklerskiego TMS Brokers.

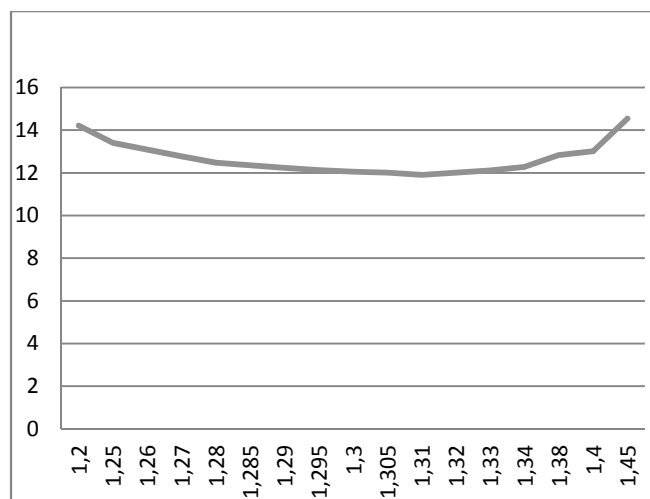
4. Struktura kursowa zmienności

Struktura kursowa zmienności dla rynków kapitałowych jest wyrazem strachu związanego ze spadkiem notowań indeksów lub kursów akcji. Jest to raczej jednostronny wzrost zmienności. W przypadku kursów walutowych problem wzrostu zmienności może wystąpić symetrycznie po dwóch stronach kursu

w stosunku do kursu ATM F. Dodatkowym problemem na rynku walutowym jest notowanie zmienności względem kursu delty. Niestety struktura kursowa zmienności (implied volatility strike curve) jest również sprzeczna z modelem BS. Wskazuje ona na różne poziomy zmienności dla różnych kursów wykonania. Na rynku występuje tendencja do przeszacowywania opcji OTM w stosunku do ceny wynikającej z modelu BS. Jest to związane z dość niską vegą opcji i wysoką dźwignią finansową jaka występuje w przypadku transakcji opcyjnych. Krzywa wskazująca na zależność między kursem realizacji i poziomem zmienności implikowanej ma najczęściej kształt nazywany uśmiechem zmienności (volatility smile).

Wykres 3

Uśmiech zmienności dla opcji EUR/USD 01.01.2011 ATM = 1,3 EURUSD



Źródło: Ibid.

Nie jest to jedyny kształt jaki przyjmuje parametr zmienności w stosunku do kursu wykonania. Jest on związany z popytem na zabezpieczenie na dany instrument finansowy lub charakterystykę zmiany kursu walutowego. W przypadku większego popytu na opcje zabezpieczające, spadek kursu walutowego (opcje put) w stosunku do opcji zabezpieczających wzrost kursu walutowego zmienność rynkowa opcji OTM call może pozostawać na tym samym poziomie co opcje ATM. Natomiast w przypadku opcji OTM put, zmienność implikowana wzrasta. Taka krzywa posiada kształt półuśmiechu zmienności (volatility sneer,

skew). W przypadku opcji walutowych rynków rozwijających się jak np. rynek PLN występuje specyficzna zależność między kursem a poziomem zmienności, dla której krzywa zmienności przybiera kształt zwany grymasem zmienności (volatility smirk). Oznacza to, iż opcje z kursem realizacji wskazującym na znaczną deprecjację są wyceniane znacznie powyżej zmienności ATM, co związane jest z popytem na opcje put OTM. Opcje call OTM wyceniane są ze zmiennością zbliżoną do zmienności dla opcji ATM. W przypadku walut rynków wschodzących, aprecjacja oznacza uspokojenie i stabilizację rynku, z kolei deprecjacja jest znacznie gwałtowniejsza (efekt dźwigni) i powoduje wzrost zmienności. Z kolei na rynkach z kursami regulowanymi administracyjnie można wskazać na kształt krzywej nazywany smutkiem zmienności (volatility frown). Dla takiej konstrukcji krzywej wszystkie opcje OTM (put i call) są wyceniane ze zmiennością niższą niż ATM. Taka zmienność w praktyce jest trudna do zaobserwowania, gdyż na takim rynku nie istnieje popyt na instrumenty zabezpieczające, a dewaluacja kursów jest skokowa i stosunkowo rzadko stosowana. Należy też w tym miejscu wskazać, iż dla danego kursu realizacji zmienność rynkowa jest określana bez względu na to, czy mamy do czynienia z opcją put czy opcją call. Wynika to z parytetu pomiędzy opcją kupna i sprzedaży i odnosi się to do opcji OTM call, jak i ITM put o tym samym kursie wykonania. Zmienność implikowana wykorzystywana do wyceny obu opcji powinna być identyczna, dlatego na rynku walutowym posługuje się również notacją delty opcji. Wśród sposobów prezentacji uśmiechu zmienności należy wskazać: w zależności od ceny wykonania K , w zależności od Δ , który jest szczególnie ważny dla opcji walutowych, w zależności od wielkości $x = \ln\left(\frac{K}{S e^{(r-r_f)T}}\right)$, która to wielkość określa stopień odchylenia kursu wykonania od wartości spot (log-moneyness). Należy wskazać, iż dla: $x < 0$ opcja call (put) jest ITM (OTM), $x = 0$ opcja call (put) jest ATM-F, $x > 0$ opcja call (put) jest OTM (ITM).

Określenia wymaga pojęcie Δ dla opcji stosowane w konstruowaniu uśmiechu zmienności opcji walutowych. W przypadku opcji put delta przyjmuje wartości ujemne, dlatego w kontekście prezentacji uśmiechu zmienności Δ opcji put jest liczbą przeciwną do delty forward, czyli wielkości: $\hat{\Delta} = \Phi(-d_+)$, gdzie Φ jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego. Delta forward to delta przeniesiona na termin wygaśnięcia opcji czynnikiem e^{rfT} , gdzie rf jest stopą waluty bazowej, a T terminem zapadalności opcji. Oś delty może więc przyjmować dwa oznaczenia: 10P, 25P, ATM, 25C, 90C lub 10P, 25P, 50P, 75P, 90P.

5. Konstrukcja płaszczyzny zmienności implikowanej na rynku walutowym

Macierz utworzona przez terminy zapadalności oraz kursy realizacji określana jest jako płaszczyzna zmienności (volatility surface). Jednymi z pierwszych badaczy, którzy opisywali teorię płaszczyzny zmienności byli J. Gatheral⁶ oraz N. Taleb⁷. Dalsze prace nad opisem dynamiki płaszczyzny zmienności kontynuowali I. Clark⁸ oraz Castagna⁹. Zmienność można określić funkcją: $V = f(t, K)$, gdzie: V – zmienność rynkowa, T – okres, na który opiewa opcja, K – kurs realizacji opcji.

Zmienność implikowana na rynku jest wyznaczana jedynie w punktach węzłowych. W przypadku terminów zapadalności są to najczęściej okresy 1, 2, 3, 6 i 12 miesięcy. Odnośnie do kursów realizacji wybiera się kursy realizacji wykazujące przy danym poziomie zmienności wspomniane już delty 90, 75, 25 i 10 (dla opcji call). Terminy łamane i kursy pośrednie należy wyznaczyć różnymi metodami interpolacyjnymi. Ponadto, płaszczyznę zmienności wyznacza się na podstawie trzech punktów wykresu dla:

- zmienności opcji $25\Delta P - \sigma_{25}put$,
- zmienności opcji ATM – σ_{ATM} ,
- zmienności opcji $25\Delta call - \sigma_{25}call$, przy czym dwie ostatnie wartości są kwotowane pośrednio poprzez:
- zmienność strategii *25 delta risk reversal*: $\sigma_{25}RR = \sigma_{25}c - \sigma_{25}p$,
- zmienność strategii *25 delta butterfly*: $\sigma_{25}BF = \frac{1}{2}(\sigma_{25}c + \sigma_{25}p) - \sigma_{ATM}$.

Innym sposobem wyznaczenia płaszczyzny zmienności jest skorzystanie z trzech strategii opcyjnych: *zero delta Straddle (STD)*, *25 delta Risk Reversal (RR)*, *25 delta Butterfly (BF)*. Zmienność strategii *25 delta Risk Reversal* wyznacza stopień skośności uśmiechu zmienności. Zmienność strategii *25 delta Butterfly* określa stopień wypukłości uśmiechu zmienności.

⁶ J. Gatheral: *The Volatility Surface, A Practitioner's Guide*. Wiley, New Jersey 2006.

⁷ N.N. Taleb: *Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options*. Wiley Finance, New York 1997, s. 147.

⁸ I.J. Clark: *Foreign Exchange Option Pricing*. Wiley Finance, Eastbourne 2011, s. 63.

⁹ A. Castagna: *FX Options and Smile Risk*. Wiley Finance, Wiltshire 2010, s. 91.

Tabela 1

Przykładowa macierz płaszczyzny zmienności

Expiry	Date	ATM	25D R/R	25D Eq Fly
O/N	15-sty-13	14,00%	-1,00%	0,26%
1W	21-sty-13	11,50%	-1,38%	0,28%
2W	28-sty-13	11,10%	-1,67%	0,29%
1M	13-lut-13	11,10%	-2,38%	0,37%
2M	15-mar-13	11,05%	-2,60%	0,40%
3M	15-kwi-13	10,90%	-2,85%	0,46%
6M	15-lip-13	10,70%	-3,31%	0,63%
9M	14-paź-13	10,40%	-3,61%	0,68%
1Y	14-sty-14	10,25%	-3,90%	0,75%
2Y	14-sty-15	9,75%	-4,00%	0,81%

Źródło: A. Castagna: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010.

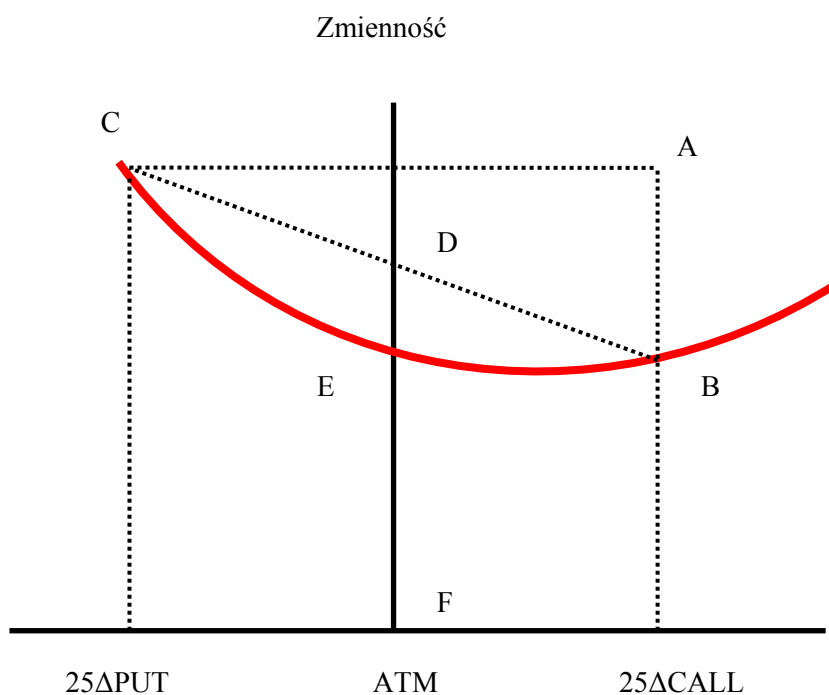
Strategia *Zero delta Straddle* – strategia stelaża ATM – jest złożeniem dwóch opcji *50Δcall* oraz *50Δput* (obie kupione lub sprzedane). Zmienność tej strategii to podstawowy parametr, który wskazuje na opcje z najwyższym parametrem vega dla określonego terminu zapadalności. Zastosowanie takiej strategii oznacza inwestycję na podstawie drugiego momentu centralnego czyli wariancji rozkładu stóp zwrotu. *25 delta Risk Reversal* – jest złożeniem opcji *25Δcall* oraz *25Δput* (jedna kupiona druga sprzedana). RR pokazuje, jaka jest różnica zmienności rynkowej dla opcji z kursami rozłożonymi symetrycznie względem kursu forward, z których jeden znajduje się po stronie aprecjacyjnej a drugi po stronie deprecjacyjnej. Jest to inwestycja na podstawie trzeciego momentu centralnego, czyli skośności rozkładu stóp zwrotu. *25 delta Butterfly* – strategia żelaznego motyla – składa się ze złożenia strategii typu *25Δ strangle* oraz *zeroΔ straddle* (jedna strategia kupiona, druga sprzedana). Pierwsza strategia składa się z opcji *25Δcall* oraz *25Δput* – obie kupione lub sprzedane. W tym wypadku inwestor kupuje kurs realizacji równy terminowemu i sprzedaje kursy realizacji rozłożone symetrycznie względem kursu oczekiwanego. Jest to inwestycja na podstawie czwartego momentu centralnego – kurtozy rozkładu stóp zwrotu¹⁰. Strategie typu *25Δstrangle* można również alternatywnie oszacować jako: $\sigma_{STG25} = \sigma_{ATM} + \sigma_{BF25}$.

¹⁰ P. Mielus: Op. cit., s. 89.

Cena strategii *Straddle* i *Strangle* jest średnią z cen pojedynczych opcji składających się na omawiane strategie. Natomiast cena RR i BF jest różnicą zmienności rynkowej dla opcji cząstkowych (jedną opcję kupujemy, drugą sprzedajemy). W takim zestawieniu zachodzą następujące relacje:

$$STD_{50} = 0,5(C_{50} + P_{50}), \quad RR_{50} = C_{25} - P_{25}, \quad BF_{25} = STD_{50} - STG_{25}, \\ STG_{25} = 0,5(C_{25} + P_{25}).$$

Po przekształceniu otrzymanych formuł na poziomy zmienności implikowanej dla opcji z niskimi deltami można je wycenić następująco:
 $C_{25} = STD_{50} + BF_{25} + 0,5RR_{25}$, $P_{25} = STD_{50} + BF_{25} - 0,5RR_{25}$.



Rys. 1. Prezentacja konstrukcji uśmiechu zmienności dla kursu walutowego

Analizując rys. 1 należy wskazać, iż odcinek ED odpowiada za koszt transakcji BF a odcinek AB za koszt transakcji RR. Koszt zmienności instrumentu I można oszacować na podstawie oszacowania ceny opcji z uwzględnieniem uśmiechy zmienności na podstawie formuły: $I_{cost} = I_{MKT} - I_{BS}$, co następnie można zastosować do ustalenia kosztu zmienności dla transakcji BF oraz RR.

$$RR_{cena} = [Call(K_c, \sigma(K_c)) - Put(K_p, \sigma(K_p))] - [Call(K_c, \sigma_{ATM}) - Put(K_p, \sigma_{ATM})]$$

$$BF_{cena} = \frac{1}{2} [Call(K_c, \sigma(K_c)) - Put(K_p, \sigma(K_p))] - \frac{1}{2} [Call(K_c, \sigma_{ATM}) - Put(K_p, \sigma_{ATM})]$$

Dyskretną strukturę zmienności można przedstawić w postaci dwuwymiarowej tablicy jako macierz wartości indeksowanych dwoma zmiennymi, okresami, które odpowiadają wystandaryzowanym terminom zapadalności opcji oraz delt opcji (względnie cenom wykonania). Indeksy czasowe oraz konwencje delty były już wcześniej zaprezentowane. Dyskretna struktura zmienności implikowanej ma więc postać¹¹

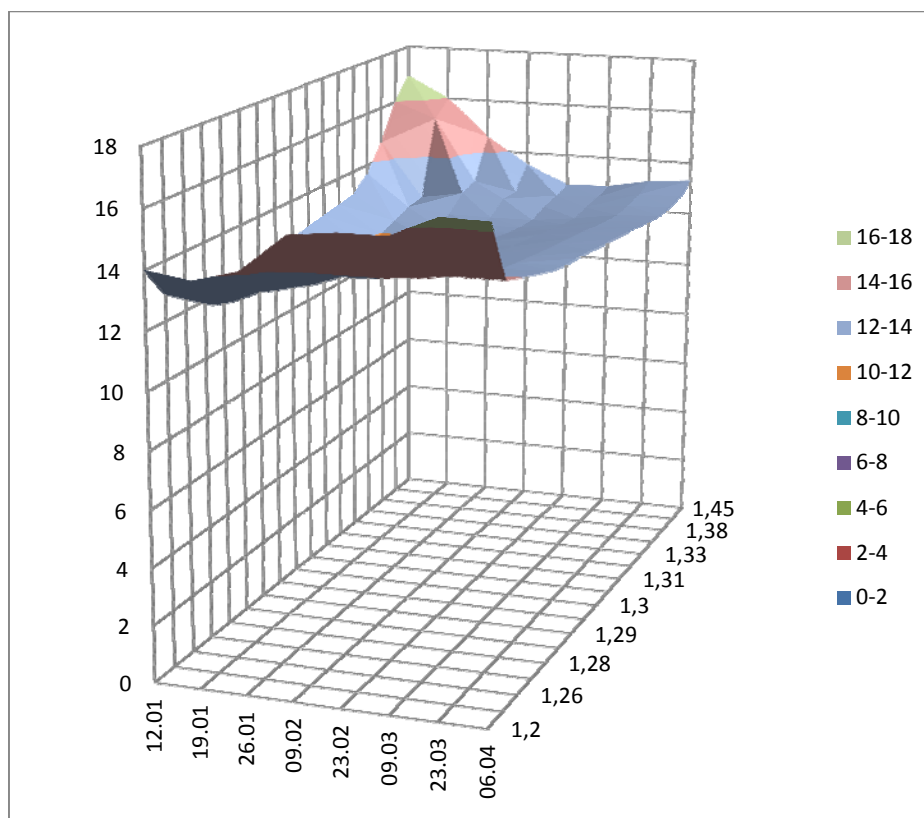
$$\begin{pmatrix} Ti \backslash \Delta k & 10 & 25 & 50 & 75 & 90 \\ 1D & \delta 1d, 10 & \delta 1d, 25 & \delta 1d, 50 & \delta 1d, 75 & \delta 1d, 90 \\ 1W & \delta 1w, 10 & \delta 1w, 25 & \delta 1w, 50 & \delta 1w, 75 & \delta 1w, 90 \\ 1Y & \delta 1y, 10 & \delta 1y, 25 & \delta 1y, 50 & \delta 1y, 75 & \delta 1y, 90 \end{pmatrix}$$

Kształt uśmiechu zmienności dla okresów krótszych jest wyraźny, a dla okresów dłuższych staje się bardziej płaski i wygładzony. Implikowana płaszczyzna zmienności jest tworzona na podstawie struktury zmienności i ma trzy wymiary: delty lub ceny wykonania, okresu do zapadalności oraz poziomu zmienności.

¹¹ W. Waluś, M. Baryło: Inżynieria finansowa. Matematyka stosowana. UW, Warszawa 2011, s. 121.

Wykres 4

Płaszczyzna zmienności dla pary walutowej EUR/USD 01.01.2011



Źródło: A. Castagna: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010.

6. Interpolacja metodą Vanna-Volga

Po raz pierwszy metoda ta została przedstawiona w pracy A. Liptona i W. McGhee¹². Aby oszacować zmienność dla poszczególnych opcji znajdujących się na osi płaszczyzny zmienności i odpowiadającym węzłom ją tworzącym, a nienotowanych przez rynek, należy zastosować metodę interpolacji. Należy określić zmienność dla opcji z następującymi cenami wykonania: K_{xxP} , K_{ATM} , K_{xxC} oraz odpowiadającym im zmiennościom implikowanym

¹² A. Lipton, W. McGhee: An Efficient Implementation of the Universal Volatility Model, 2001.

σ_{xxP} , σ_{ATM} , σ_{xxC} przeprowadzając interpolację międzypunktową. Jedną z metod interpolacji jest wykorzystanie metody Vanna Volga (VV)¹³. Pozwala ona dostarczyć wartość zmienności implikowanej dla każdego z węzłów delty znajdującej się na osi płaszczyzny zmienności. Zaprezentowana zostanie uproszczona notacja, która przyjmuje ceny wykonania K_i , dla $i = 1, 2, 3$. Metoda VV opiera się na skonstruowaniu portfeli replikujących składające się odpowiednio z $x_1 = x_1(K)$, $x_2 = x_2(K)$, $x_3 = x_3(K)$ jednostek opcji o cenach wykonania K_1, K_2, K_3 oraz Δ_t ilości aktywa, na które wystawiona jest opcja. Dokonując odpowiednich obliczeń otrzymujemy wzory na

$$\begin{aligned} \text{Vega: } \frac{\delta C_{BS}(t;K)}{\delta \sigma} &= \sum_{i=1}^3 X_i(t;K) \frac{\delta C_{BS}(t;K_i)}{\delta \sigma} \\ \text{Vanne: } \frac{\delta C_{BS}(t;K)}{\delta \sigma} &= \sum_{i=1}^3 X_i(t;K) \frac{\delta^2 C_{BS}(t;K_i)}{\delta^2 \sigma} \\ \text{Volge: } \frac{\delta C_{BS}(t;K)}{\delta \sigma} &= \sum_{i=1}^3 X_i(t;K) \frac{\delta^2 C_{BS}(t;K_i)}{\delta \sigma \delta S_t} \end{aligned}$$

Vega wskazuje na zmianę ceny opcji pod wpływem zmiany zmienności, Vanna wskazuje na zmianę parametru Vega pod wpływem zmiany ceny instrumentu bazowego, Volga wskazuje na zmianę Vegi pod wpływem zmiany zmienności. Po przekształceniu wzorów BS można uzyskać analityczną postać Vegi, Vanny oraz Volgi.

$$\begin{aligned} v(t, K) &= \frac{\delta^2 C_{BS}(t; K)}{\delta \sigma \delta S_t} \\ \frac{\delta C_{BS}(t; K_i)}{\delta \sigma} &= S_t D F_f(t, T) \sqrt{\tau} \Phi(d_+(t, K)) = S N'(d_+) \sqrt{T-t}, \\ \frac{\delta^2 C_{BS}(t; K_i)}{\delta^2 \sigma} &= \frac{v(t, K)}{\sigma} d_+(t, K) d_-(t, K) = S_0 \sqrt{T-t} N'(d_+) \frac{d_+ d_-}{\sigma} \\ \frac{\delta^2 C_{BS}(t; K_i)}{\delta \sigma \delta S_t} &= -\frac{v(t, K)}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} d_-(t, K) = \frac{N'(d_+) d_-}{\sigma} \end{aligned}$$

Bazując na powyższych wzorach i przyjmując za zmienność σ_{ATM} otrzymamy wagi $x_i(t, K)$ oraz przyjmując, że $K_1 < K_2 < K_3$

$$x_1(K) = \frac{v(t, K) \ln\left(\frac{K_2}{K}\right) \ln\left(\frac{K_3}{K}\right)}{v(t, K_1) \ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) \ln\left(\frac{K_3}{K_1}\right)}$$

¹³ A. Castagna, F. Mercurio: Consistent Pricing of FX Options. Wiley Finance, Mediolan 2007.

$$\begin{aligned}
 x_2(K) &= \frac{v(t, K) \ln\left(\frac{K_1}{K}\right) \ln\left(\frac{K_3}{K}\right)}{v(t, K_2) \ln\left(\frac{K_1}{K_2}\right) \ln\left(\frac{K_3}{K_2}\right)} \\
 x_3(K) &= \frac{v(t, K) \ln\left(\frac{K_1}{K}\right) \ln\left(\frac{K_2}{K}\right)}{v(t, K_3) \ln\left(\frac{K_1}{K_3}\right) \ln\left(\frac{K_2}{K_3}\right)} \\
 x_{ATM}(K) &= x_1(K) + x_2(K) + x_3(K) \\
 x_{RR}(K) &= \frac{1}{2}(x_3(K) - x_1(K)) \\
 x_{BF}(K) &= x_1(K) + x_3(K)
 \end{aligned}$$

Podsumowaniem modelu interpolacji uśmiechu zmienności metoda Vanna Volga jest wzór na cenę opcji dla danego t i K , który implikuje krzywą zmienności: $C(t, K) = C_{BS} + \sum_{i=1}^3 x_i(t, K)(C_{MKT}(t, K_i) - C_{BS}(t, K_i))$, gdzie: $C_{MKT}(t, K_i)$ – cena opcji call wyliczona z modelu BS z ceną wykonania K_i i czasem zapadalności t oraz zmiennością σ_i , $C_{BS}(t, K_\alpha)$ – cena opcji call wyliczona z modelu BS z ceną wykonania K_α i zmiennością σ_{ATM} .

Odwracając formułę krzywej zmienności względem σ można policzyć zależność od każdego K i tym samym krzywą uśmiechu zmienności. Ekstrapolacja dla bardzo wysokich delt nie ma dużego znaczenia, gdyż zmienność dla wysokich cen wykonania nie jest mocno wrażliwa. Czasowa ekstrapolacja też nie ma większej wrażliwości dlatego, iż płaszczyzna „wypłaszcza” się wraz ze wzrostem terminów do zapadalności.

Podsumowanie

Zrozumienie dynamiki zmian na rynku walutowym jest kluczowe w przypadku zarządzania ekspozycją walutową. Ciągłe zmiany na rynku walutowym wymagają zaangażowania coraz bardziej zaawansowanych technik analizy ryzyka walutowego i zmienności. Stosowanie coraz bardziej zaawansowanych instrumentów finansowych powoduje zapotrzebowanie na tworzenie modeli matematycznych próbujących opisać zachowanie się kursów walutowych oraz ich zmienności. Niniejszy artykuł pozwala na zrozumienie podstawowych aspektów wpływających na kształtowanie się ryzyka walutowego.

Literatura

- Castagna A.: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010.
- Castagna A., Mercurio F.: Consistent Pricing of FX Options. Wiley Finance, Mediolan 2007.
- Clark I.J.: Foreign Exchange Option Pricing. Wiley Finance, Eastbourne 2011.
- Gatheral J.: The Volatility Surface, A practitioner's Guide. Wiley, New Jersey 2006.
- Garman M.B. and Kohlhagen S.W.: Foreign Currency Option Values. „Journal of International Money and Finance” 1983, Vol. 2.
- Heston S.L.: A Closed form Solution for Option with Stochastic Volatility with Application for Bonds and Currency Options. „Review of Financial Studies” 1993, Vol. 6.
- Hull J.C., White A.: The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities. „Journal of Finance” 1997, Vol. 42.
- Gatheral J.: The Volatility Surface, A Practitioner's Guide. Wiley, New Jersey 2006.
- Lipton A., McGhee W.: An Efficient Implementation of the Universal Volatility Model, 2001.
- Mielus P.: Rynek opcji walutowych w Polsce. K.E. Liber, Warszawa 2002.
- Taleb N.N.: Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options. Wiley Finance, New York 1997.
- Waluś W., Baryło M.: Inżynieria finansowa. Matematyka stosowana. UW, Warszawa 2011.

CONSTRUCTION OF THE VOLATILITY SURFACE ON FOREIGN EXCHANGE MARKET

Summary

The foreign exchange market is one of the most important segments of the financial market. FX options market is also one of the largest in the world. In the case of the basic model of option pricing – Merton Scholes model variability Blacks used for option pricing is constant and flat over time and does not change in relation to the strike price. The term structure of volatility is creating volatility surfaces for which variability has different levels depending on the date and the exercise price of options. This paper presents the characteristics of the exchange rate and pattern construction plane volatility smile in the currency market. Article characterized the basic concepts of interpolation and extrapolation of pairs trading volatility certain exchange rates.

MODELOWANIE ROZMYTE

Paweł Konopka

Uniwersytet w Białymstoku

ZASTOSOWANIE WNIOSKOWANIA ROZMYTEGO DO OCENY RYZYKA KREDYTOWEGO PRZEDSIĘBIORSTW

Wprowadzenie

W artykule przedstawiono teoretyczną koncepcję modelu oceny zdolności przedsiębiorstwa do terminowego wywiązywania się z zobowiązań kredytowych, opartą na koncepcji wnioskowania rozmytego. Do weryfikacji empirycznej zaproponowanego modelu wykorzystano dane o 37 kredytach inwestycyjnych zaciągniętych w jednym z największych banków spółdzielczych w województwie podlaskim. W grupie kredytobiorców znajdują się zarówno podmioty terminowo spłacające zobowiązania kredytowe, jak i podmioty mające znaczące opóźnienia w spłacie, z zaprzestaniem spłaty włącznie. W procesie oceny zdolności kredytowej w tym banku nie był wykorzystywany żaden model probabilistyczny, ocena była dokonywana metodą opisową, opierając się na wiedzy eksperckiej oraz proponowanych zabezpieczeniach kredytu. W artykule zaproponowano proces oceny zdolności kredytowej, jako proces wnioskowania rozmytego z wykorzystaniem zmiennych lingwistycznych służących szacowaniu ryzyka. Celem pracy była próba odpowiedzi na pytanie, czy ujęcie usystematyzowanej wiedzy eksperckiej w modelu rozmytym oceny zdolności kredytowej daje lepsze rezultaty w rozpoznawaniu „złych” i „dobrych” kredytobiorców w porównaniu do klasycznego eksperckiego modelu oceny zdolności kredytowej. Opracowanie składa się z czterech części. We wprowadzeniu skrótowo omówiono tematykę ryzyka kredytowego w finansowaniu przedsiębiorstw, drugą część poświęcono tematyce zbiorów i wnioskowaniu rozmytemu. W rozdziale trzecim przedstawiono opracowany model oraz przedstawiono wyniki empirycznych badań. Część czwarta stanowi posumowanie.

1. Ryzyko kredytowe w finansowaniu przedsiębiorstw

Ze względu na mnogość czynników zewnętrznych i wewnętrznych, które wpływają na całokształt działalności przedsiębiorstwa, badanie ryzyka kredytowego w finansowaniu przedsiębiorstw jest zadaniem złożonym. Do najważniejszych czynników zewnętrznych mających wpływ na funkcjonowanie firmy można zaliczyć czynniki koniunkturalno-rynkowe (np. cykle koniunkturalne), polityczno-systemowe (np. podatki, obostrzenia prawne) oraz społeczno-demograficzne. Do czynników wewnętrznych zaliczamy np. sprawność zarządzania firmą, która przekłada się na poziom wskaźników finansowych charakteryzujących przedsiębiorstwo. Z pojęciem ryzyka kredytowego nierozdzielnie związane jest pojęcie zdolności kredytowej. Pojęcie to jest różnie definiowane w zależności od płaszczyzny rozważań (np. w podejściu stricte prawnym)¹. Na potrzeby artykułu poprzez pojęcie zdolności kredytowej przedsiębiorstwa będziemy rozumieli jego zdolność do kompletnego oraz terminowego wywiązywania się z posiadanych zobowiązań oraz zaciągania nowego kredytu.

W celu uproszczenia procesu oceny ryzyka banki posługują się modelami oceny ryzyka, których postać (równanie bądź równania) budowane są na podstawie historycznych wyników finansowych przedsiębiorstw². Najczęściej wykorzystywanymi przez banki metodami modelowania ryzyka są: analiza dyskryminacyjna³, analiza regresji, analiza logitowa, modele punktowe oraz sztuczne sieci neuronowe. Wykorzystanie modelu statystycznego w procesie oceny ryzyka skraca czas oraz redukuje koszty procesu oceny wniosków kredytowych. Oprócz pozytywnych stron stosowania modeli statystycznych, wyróżnić można także stronę negatywną. Wadami włączenia do procesu oceny ryzyka kredytowego przedsiębiorstw modeli bazujących wyłącznie na danych historycznych są: szybka dezaktualizacja danych użytych z budowie modeli, zbyt mała liczba danych użyta do budowy modeli oraz niewielka wartość informacyjna zwracana przez model. Należy także uwzględnić fakt, iż banki dysponują wiedzą niepełną i niepewną oraz rzadko gromadzą dane na temat odrzuconych wniosków kredytowych. Niezbędne w ocenie ryzyka kredytowego przedsiębiorstw

¹ A. Krysiak, A. Staniszevska, M.S. Wiatr: Zarządzanie portfelem kredytowym banku. SGH, Warszawa 2012.

² A. Janc, M. Kraska: Credit-scoring. Nowoczesna metoda oceny zdolności kredytowej. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 2001; A. Matuszyk: Credit Scoring. CeDeWu, Warszawa 2008.

³ Jednym z pierwszych szeroko omawianych modeli był model Altmana, oparty na metodzie analizy dyskryminacyjnej. Pomimo wysokiej mocy dyskryminacyjnej, za wadę modelu Altman uznał niedostatecznie uzasadniony dobór użytych zmiennych.

staje się włączenie do modelowania oprócz danych historycznych także wiedzy eksperckiej. Taką możliwość, ze względu na swój charakter, dają modele oparte na wnioskowaniu rozmytym⁴.

2. Podstawowe zagadnienia wnioskowania rozmytego

Pojęcie zbioru rozmytego, będącego rozszerzeniem klasycznej definicji zbioru, przedstawił Lotfi Zadeh w 1965 roku⁵. Standardowo z każdym zbiorem A jednoznacznie związana jest jego funkcja charakterystyczna

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

która przyjmuje wartość 1, gdy element x należy do zbioru A , oraz wartość 0 gdy element x nie należy do tego zbioru.

Rozmyta teoria zbiorów dopuszcza sytuacje, w których element x może należeć do zbioru tylko w jakimś stopniu, może też należeć jednocześnie do zbioru oraz jego dopełnienia. Według definicji zbiorem rozmytym A w przestrzeni X nazywamy zbiór określony następująco

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\} \quad (2)$$

gdzie $\mu_A(x)$ jest funkcją przynależności elementu $x \in X$ do zbioru rozmytego A .

W modelach rozmytych stosowane są różne operacje na zbiorach rozmytych. Do najczęściej stosowanych operacji zalicza się operacje sumy i różnicy, które definiuje się następująco:

- sumą dwóch zbiorów rozmytych A i B jest zbiór $A \cup B$ z funkcją przynależności określoną następująco

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad x \in X \quad (3)$$

⁴ D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank: Wprowadzenie do sterowania rozmytego. WNT, Warszawa 1996; A. Łachwa: Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji. Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa 2001; I. Rejer: Integracja wiedzy w modelach rozmytych zależności ekonomicznych. Rozprawy i Studia. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2008.

⁵ L.A. Zadeh: Fuzzy Sets. „Information and Control” 1965, No. 8, s. 338-353.

- iloczynem dwóch zbiorów rozmytych A i B jest zbiór $A \cap B$ z funkcją przynależności określoną następująco

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \quad x \in X \quad (4)$$

W celu wyrażania informacji w sposób niejednoznaczny, należy posłużyć się pojęciem zmiennej lingwistycznej⁶. Poprzez pojęcie zmiennej lingwistycznej rozumiemy piątkę postaci

$$(X, T(X), U, G, M) \quad (5)$$

gdzie:

X – nazwa zmiennej lingwistycznej (np. ryzyko),

$T(X)$ – zbiór określeń lingwistycznych np. {„niskie”, „umiarkowane”, „wysokie”},

U – przestrzeń rozważań (np. przedział zmiennej rentowności aktywów ROA [-20%;20%]),

G – gramatyka tworząca wartości lingwistyczne $T(X)$,

M – znaczeniem, przy czym $M(X)$ jest podzbiorem rozmytym w przestrzeni U .

Zmienną lingwistyczną *Ryzyko* (R) może opisać poprzez określenia lingwistyczne $T_R(X) = \{ \text{„niskie”, „umiarkowane”, „wysokie”} \}$, przestrzeń rozważań można opisać za pomocą przedziału $U = [0, 1]$, natomiast znaczeniem M będzie zbiór funkcji przynależności do poszczególnych zbiorów rozmytych. W literaturze spotykamy także wiele modeli rozmytych, zróżnicowanych pod względem reguł rozmytych lub zastosowanego mechanizmu wnioskowania. W praktyce najczęściej wykorzystywane są dwa modele: model Mamdaniego⁷ oraz model Takagi-Sugeno⁸.

⁶ L.A. Zadeh: The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-III. Information Sciences 9, American Elsevier Publishing Company, Inc. 1975, s. 43-80.

⁷ A. Piegat: Modelowanie i sterowanie rozmyte. Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa 1999.

⁸ R.P. Paiva, A. Douranto: Structure and Parametr Learning of Neuro-Fuzzy Systems: A Methodology and Comparative Study. „Journal of Intelligent & Fuzzy Systems” 2001, No. 11.

W pierwszym etapie budowy modelu wybrane do modelu zmienne przedstawiane są jako zmienne lingwistyczne. Istotne jest tu określenie kształtu funkcji przynależności do poszczególnych zbiorów rozmytych. Główną rolę odgrywają tu dane oraz wiedza eksperta. W kolejnym kroku budowana jest baza reguł będąca systematycznym ujęciem wiedzy eksperckiej na temat badanego zjawiska. W wyniku wnioskowania otrzymuje się wynikową funkcję przynależności, która stanowi punkt wyjścia do procesu wyostrażania⁹. W pracy jako metodę wyostrażania zastosowano metodę środka ciężkości. Metoda środka ciężkości pozwala uwzględnić wszystkie zaktywowane zbiory rozmyte oraz zachowuje ciągłość na wyjściu sterownika. Środek ciężkości wyznaczany jest przez funkcjonal

$$I(\mu(x)) = \frac{\int_D x\mu(x)dx}{\int_D \mu(x)dx} \quad (6)$$

gdzie:

$\mu(x)$ – funkcja przynależności zbioru rozmytego,

D – przedział liczbowy na którym określona jest funkcja przynależności zbioru rozmytego.

3. Modele oceny ryzyka kredytowego w ujęciu zbiorów rozmytych

Budowa proponowanego modelu oceny ryzyka kredytowego przedsiębiorstwa w ujęciu rozmytym składa się z zastępujących etapów:

- I. Wybór zmiennych diagnostycznych.
- II. Przedstawienie wprowadzonych do modelu zmiennych jako zmiennych lingwistycznych, z uwzględnieniem podziału kredytobiorców na dwie grupy („dobrzy” kredytobiorcy, „źli” kredytobiorcy).
- III. Budowa bazy reguł wnioskowania.
- IV. Weryfikacja empiryczna modelu.

⁹ K. Tanaka: An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications. Springer, Berlin 1997.

Ze względu na kompletność pozyskanych danych w procesie doboru zmiennych wykorzystywanych do budowy modeli zastosowano dwa podejścia:

Podejście I: rozpatrzono grupę kredytobiorców, którą ze względu na większą ilość zmiennych diagnostycznych można opisać za pomocą większej liczby wskaźników. Grupa ta składa się głównie z przedsiębiorstw prowadzących pełną księgowość.

Podejście II: rozważono tu dane o wszystkich kredytobiorcach, lecz ze względu na niekompletność danych grupa ta jest opisywana za pomocą mniejszej liczby wskaźników.

W obu podejściach wykorzystano zmienne w postaci wskaźników, do wybrania zmiennych zastosowano metodę analizy macierzy korelacji¹⁰. W podejściu I do modelu rozmytego zakwalifikowano następujące zmienne:

- rentowność aktywów (ROA),
- wartość zaciągniętego kredytu (WK),
- rotacja zobowiązań (RZ),
- wskaźnik relacji zysku netto do wartości zaciągniętego kredytu (ZN/WK).

Wymienione wyżej wskaźniki potraktowano jako zmienne lingwistyczne, przy czym założono, iż każda ze zmiennych będzie przyjmować dwie wartości: „niski poziom wskaźnika” oraz „wysoki poziom wskaźnika”. Opis zmiennych za pomocą dwóch zbiorów rozmytych podyktowany jest następującymi aspektami:

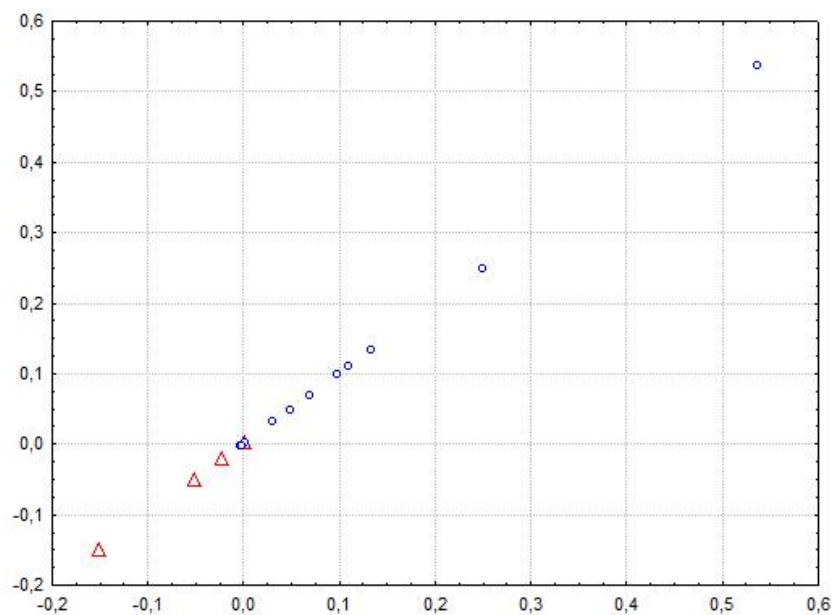
- rozpatrujemy dwie grupy klientów (tych, którzy terminowo wywiązują się ze spłaty zobowiązań (tzw. dobrzy klienci) oraz tych, których kredyt uznano za stracony (tzw. źli klienci),
- złożonością modelu, im większa ilość zbiorów rozmytych przynależących do poszczególnych zmiennych lingwistycznych, tym większa złożoność bazy reguł wnioskowania,
- wartości poszczególnych wskaźników obu grup klientów stanowią dwa zbiory o niepustym przekroju.

Sytuację przedstawia wykres 1.

¹⁰ E. Nowak: Zarys metod ekonometrii. PWN, Warszawa 1997; J. Peters: A Cognitive Computational Model of Risk Hypothesis Generation. „Journal of Accounting Research” 1990, No. 28, s. 83-109.

Wykres 1

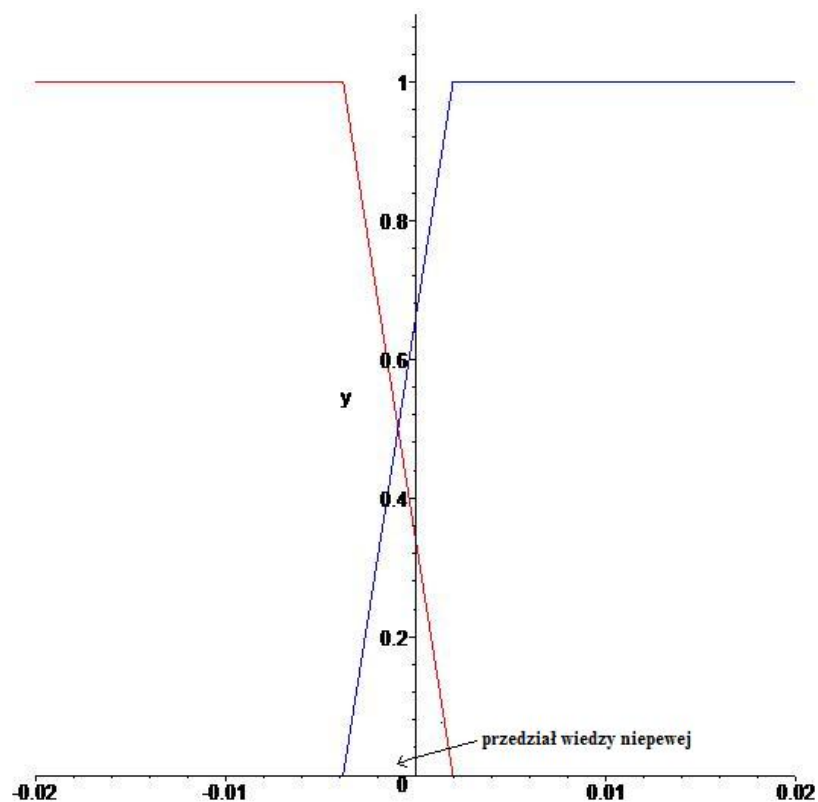
Wskaźnik ROA, nierozłączność zbiorów wskaźników w grupie dobrych i złych klientów (oś X oraz oś Y prezentują wartości wskaźnika ROA, trójkątami oznaczono tzw. złych klientów, kółkami oznaczono dobrych klientów)



Sytuacja powyższa dotyczy także pozostałych, używanych w proponowanych modelach, wskaźników finansowych. Przedział zmiennej, w którym nie możemy jednoznacznie stwierdzić, że znajdują się w nim wartości wskaźników pochodzące wyłącznie z jednej grupy klientów jest przedziałem wiedzy niepewnej. Na wykresie 2 przedstawiono sposób rozmycia danych, z zaznaczeniem problematycznego przedziału zmiennej.

Wykres 2

Zmienna lingwistyczna ROA wraz z zbiorami rozmytymi Wysoki poziom ROA (po prawej), oraz Niski poziom ROA (po lewej)



W modelu rozpatrywane są cztery zmienne lingwistyczne wejściowe:

1. Zmienna ROA, $T_{ROA}(X) = \{„niski”, „wysoki”\}$,
 $U^{ROA} = [z_L^{ROA}, z_P^{ROA}] \cup [d_L^{ROA}, d_P^{ROA}]$

gdzie:

- z_L^{ROA} – najmniejsza wartość zmiennej ROA z grupy złych klientów,
- z_P^{ROA} – największa wartość zmiennej ROA z grupy złych klientów,
- d_L^{ROA} – najmniejsza wartość zmiennej ROA z grupy dobrych klientów,
- d_P^{ROA} – największa wartość zmiennej ROA z grupy dobrych klientów.

Funkcje przynależności do zbioru „niski” poziom ROA oraz zbioru „wysoki” poziom ROA mają postać

$$M_{Niski}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in [z_L^{ROA}, d_L^{ROA}] \\ \frac{1}{d_L^{ROA} - z_P^{ROA}} x - \frac{z_P^{ROA}}{d_L^{ROA} - z_P^{ROA}} & \text{gdy } x \in [d_L^{ROA}, z_P^{ROA}] \\ 0 & \text{gdy } x \in [z_P^{ROA}, d_P^{ROA}] \end{cases} \quad (7)$$

$$M_{Wysoki}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [z_L^{ROA}, d_L^{ROA}] \\ \frac{1}{z_P^{ROA} - d_L^{ROA}} x - \frac{d_L^{ROA}}{z_P^{ROA} - d_L^{ROA}} & \text{gdy } x \in [d_L^{ROA}, z_P^{ROA}] \\ 1 & \text{gdy } x \in [z_P^{ROA}, d_P^{ROA}] \end{cases} \quad (8)$$

2. Zmienna WK, $T_{WK}(X) = \{„mała”, „duża”\}$,

$$U^{WK} = [z_L^{WK}, z_P^{WK}] \cup [d_L^{WK}, d_P^{WK}]$$

gdzie:

z_L^{WK} – najmniejsza wartość zmiennej WK z grupy złych klientów,

z_P^{WK} – największa wartość zmiennej WK z grupy złych klientów,

d_L^{WK} – najmniejsza wartość zmiennej WK z grupy dobrych klientów,

d_P^{WK} – największa wartość zmiennej WK z grupy dobrych klientów.

Funkcje przynależności do zbioru „mała” wartość WK oraz zbioru „duża” wartość WK mają postać

$$M_{mała}^{WK}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in [z_L^{WK}, d_L^{WK}] \\ \frac{1}{d_L^{WK} - z_P^{WK}} x - \frac{z_P^{WK}}{d_L^{WK} - z_P^{WK}} & \text{gdy } x \in [d_L^{WK}, z_P^{WK}] \\ 0 & \text{gdy } x \in [z_P^{WK}, d_P^{WK}] \end{cases} \quad (9)$$

$$M_{duża}^{WK}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [z_L^{WK}, d_L^{WK}] \\ \frac{1}{z_P^{WK} - d_L^{WK}} x - \frac{d_L^{WK}}{z_P^{WK} - d_L^{WK}} & \text{gdy } x \in [d_L^{WK}, z_P^{WK}] \\ 1 & \text{gdy } x \in [z_P^{WK}, d_P^{WK}] \end{cases} \quad (10)$$

3. Zmienna RZ, $T_{RZ}(X) = \{„krótka”, „długa”\}$,

$$U^{RZ} = [z_L^{RZ}, z_P^{RZ}] \cup [d_L^{RZ}, d_P^{RZ}]$$

gdzie:

z_L^{RZ} – najmniejsza wartość zmiennej RZ z grupy złych klientów,

z_P^{RZ} – największa wartość zmiennej RZ z grupy złych klientów,

d_L^{RZ} – najmniejsza wartość zmiennej RZ z grupy dobrych klientów,

d_P^{RZ} – największa wartość zmiennej RZ z grupy dobrych klientów.

Funkcje przynależności do zbioru „krótka” wartość RZ oraz zbioru „długa” wartość RZ mają postać

$$M_{długa}^{RZ}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in [z_L^{RZ}, d_L^{RZ}] \\ \frac{1}{d_L^{RZ} - z_P^{RZ}} x - \frac{z_P^{RZ}}{d_L^{RZ} - z_P^{RZ}} & \text{gdy } x \in [d_L^{RZ}, z_P^{RZ}] \\ 0 & \text{gdy } x \in [z_P^{RZ}, d_P^{RZ}] \end{cases} \quad (11)$$

$$M_{krótka}^{RZ}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [z_L^{RZ}, d_L^{RZ}] \\ \frac{1}{z_P^{RZ} - d_L^{RZ}} x - \frac{d_L^{RZ}}{z_P^{RZ} - d_L^{RZ}} & \text{gdy } x \in [d_L^{RZ}, z_P^{RZ}] \\ 1 & \text{gdy } x \in [z_P^{RZ}, d_P^{RZ}] \end{cases} \quad (12)$$

4. Zmienna ZN/WK, $T_{ZN/WK}(X) = \{„niski”, „wysoki”\}$,

$$U^{ZN/WK} = [z_L^{ZN/WK}, z_P^{ZN/WK}] \cup [d_L^{ZN/WK}, d_P^{ZN/WK}]$$

gdzie:

$z_L^{ZN/WK}$ – najmniejsza wartość zmiennej ZN/WK z grupy złych klientów,

$z_P^{ZN/WK}$ – największa wartość zmiennej ZN/WK z grupy złych klientów,

$d_L^{ZN/WK}$ – najmniejsza wartość zmiennej ZN/WK z grupy dobrych klientów,

$d_P^{ZN/WK}$ – największa wartość zmiennej ZN/WK z grupy dobrych klientów.

Funkcje przynależności do zbioru „niska” wartość ZN/WK oraz zbioru „wysoka” wartość ZN/WK mają postać

$$M_{niska}^{ZN/WK}(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in [z_L^{ZN/WK}, d_L^{ZN/WK}] \\ \frac{1}{d_L^{ZN/WK} - z_P^{ZN/WK}} x - \frac{z_P^{ZN/WK}}{d_L^{ZN/WK} - z_P^{ZN/WK}} & \text{gdy } x \in [d_L^{ZN/WK}, z_P^{ZN/WK}] \\ 0 & \text{gdy } x \in [z_P^{ZN/WK}, d_P^{ZN/WK}] \end{cases} \quad (13)$$

$$M_{wysoka}^{ZN/WK}(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [z_L^{ZN/WK}, d_L^{ZN/WK}] \\ \frac{1}{z_P^{ZN/WK} - d_L^{ZN/WK}} x - \frac{d_L^{ZN/WK}}{z_P^{ZN/WK} - d_L^{ZN/WK}} & \text{gdy } x \in [d_L^{ZN/WK}, z_P^{ZN/WK}] \\ 1 & \text{gdy } x \in [z_P^{ZN/WK}, d_P^{ZN/WK}] \end{cases} \quad (14)$$

Baza reguł będzie składać się z $2^4 = 16$ reguł. Zmienną wyjściową jest zmienna lingwistyczna „Poziom ryzyka” oznaczony w regułach, jako „R”. Zmienna ta reprezentowana jest przez trzy termy lingwistyczne $T_R(X) = \{„niski poziom ryzyka”, „umiarkowany poziom ryzyka”, „wysoki poziom ryzyka”\}$, przestrzeń rozważań $U = [0, 1]$ oraz następujące funkcje przynależności po zbiorów rozmytych „niski poziom ryzyka”, „umiarkowany poziom ryzyka”, „wysoki poziom ryzyka”

$$\begin{aligned} M_{niski}^R(x) &= \begin{cases} -2x + 1 & \text{gdy } x \in [0, 0.5] \\ 0 & \text{gdy } x \in [0.5, 1] \end{cases} \\ M_{umiar.}^R(x) &= \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \in [0, 0.5] \\ -2x + 2 & \text{gdy } x \in [0.5, 1] \end{cases} \\ M_{wysoki}^R(x) &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0, 0.5] \\ 2x - 1 & \text{gdy } x \in [0.5, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Niżej przedstawiono 16 reguł wnioskowania, które skonstruowano zgodnie z modelem wnioskowania Mamdaniego.

1. Jeśli (ROA = niski) i (WK = duża) i (RZ = długa) i (ZN/WK = mały) => => (R = Wysoki).

2. Jeśli (ROA = niski) i (WK = duża) i (RZ = długa) i (ZN/WK = wysoki) => => (R = Wysoki).

3. Jeśli (ROA = niski) i (WK = duża) i (RZ = krótka) i (ZN/WK = niski) => => (R = Wysoki).

4. Jeśli (ROA = niski) i (WK = duża) i (RZ = krótka) i (ZN/WK = wysoki) => => (R = Umiarkowany).

5. Jeśli (ROA = niski) i (WK = mała) i (RZ = krótka) i (ZN/WK = wysoki) => => (R = Umiarkowany).

6. Jeśli (ROA = niski) i (WK = mała) i (RZ = krótka) i (ZN/WK = wysoki) => => (R = Średni).

...

16. Jeśli (ROA = wysoki) i (WK = mała) i (RZ = krótka) i (ZN/WK = wysoki) => => (R = Niski).

Ogólną zasadę przypisywania poziomu ryzyka w poszczególnych regułach prezentuje tabela 1.

Tabela 1

Poziom ryzyka w zależności od wartościowania
zmiennych lingwistycznych wejściowych

Ilość pozytywnych cech w regule wnioskowania*	Poziom ryzyka
4	Niski
3	Umiarkowany
2	Umiarkowany
0-1	Wysoki

* Na przykład pozytywną cechą w zmiennej lingwistycznej ROA jest określenie lingwistyczne „wysoka”.

Model rozmyty poprawnie sklasyfikował wszystkich „złych kredytobiorców”. W przypadku przedsiębiorstw solidnie spłacających zobowiązanie kredytowe, niepoprawnie zostało sklasyfikowane jedno przedsiębiorstwo.

Tabela 2

Jakość klasyfikacji – podejście I

Grupa przedsiębiorstw	Ilość poprawnie sklasyfikowanych	Ilość niepoprawnie sklasyfikowanych
„Źli kredytobiorcy”	4	0
„Dobrzy kredytobiorcy”	10	1

W podejściu II do badania wykorzystano wszystkie zgromadzone dane, co implikowało fakt, że zmienne wejściowe pochodziły z mniejszego zbioru wskaźników. Podobnie jak w podejściu I, do wyboru zmiennych użyto metodę analizy macierzy korelacji¹¹. Do modelu włączono następujące zmienne:

- rentowność kapitałów własnych (ROE),
- liczba pracowników (LP),
- wskaźnik relacji zysku netto do wartości zaciągniętego kredytu (ZN/WK).

Wymienione wyżej wskaźniki potraktowano jako zmienne lingwistyczne, przy czym założono, iż każda ze zmiennych lingwistycznych jest opisywana przez dwie terminy lingwistyczne. Podobnie jak w podejściu I, w budowie modelu wykorzystano wnioskowanie Mamdaniego. Baza reguł będzie składała się z $2^3 = 8$ reguł.

¹¹ Ibid.

1. Jeśli (ROE = niski) i (LP = mała) i (ZN/WK = niski) => (R = Wysoki).
2. Jeśli (ROE = niski) i (LP = duża) i (ZN/WK = niski) => (R = Wysoki).
3. Jeśli (ROE = niski) i (LP = mała) i (ZN/WK = wysoki) => (R = Wysoki).
4. Jeśli (ROE = niski) i (LP = duża) i (ZN/WK = wysoki) => (R = Umiarkowany).
5. Jeśli (ROE = wysoki) i (LP = mała) i (ZN/WK = niski) => (R = Wysoki).
6. Jeśli (ROE = wysoki) i (LP = duża) i (ZN/WK = niski) => (R = Umiarkowany).
7. Jeśli (ROE = wysoki) i (LP = mała) i (ZN/WK = wysoki) => (R = Umiarkowany).
8. Jeśli (ROE = niski) i (LP = duża) i (ZN/WK = wysoki) => (R = Niski).

Przyjętą zasadę przypisywania poziomu ryzyka w poszczególnych regułach prezentuje tabela 3.

Tabela 3

Poziom ryzyka w zależności od wartościowania
zmiennych lingwistycznych wejściowych

Ilość pozytywnych cech w regule wnioskowania	Poziom ryzyka
3	Niski
2	Umiarkowany
0-1	Wysoki

Model rozmyty poprawnie sklasyfikował 29 z 31 dobrych kredytobiorców. W przypadku przedsiębiorstw niewywiązujących się ze spłaty zobowiązań kredytowych, model poprawnie sklasyfikował 3 z 6 niesolidnych kredytobiorców.

Tabela 4

Jakość klasyfikacji – podejście II

Grupa przedsiębiorstw	Ilość poprawnie sklasyfikowanych	Ilość niepoprawnie sklasyfikowanych
„Źli kredytobiorcy”	3	3
„Dobrzy kredytobiorcy”	29	2

Podsumowanie

Zaletą modeli opartych na wnioskowaniu rozmytym jest to, że w procesie ich budowy uwzględniane są zarówno dane o historycznych wynikach przedsiębiorstw, jak i wiedza ekspercka¹². Podkreśla się jednocześnie, że logika rozmyta daje możliwość budowy modelu systemu rzeczywistego nawet wtedy, gdy wiedza leżąca u jego podstaw jest zbyt mała, aby można było wyrazić ją w jakikolwiek inny sposób. Zmienne lingwistyczne umożliwiają włącznie do modelu danych historycznych uwzględniając niepewność danych, baza reguł rozmytych pozwala na włącznie do modelu wiedzy eksperta. Wyniki klasyfikacji pozwalają stwierdzić, że usystematyzowanie wiedzy eksperckiej w modelu rozmytym oceny zdolności kredytowej daje niegorsze rezultaty w rozpoznawaniu „złych” i „dobrych” kredytobiorców w porównaniu do klasycznego eksperckiego modelu oceny zdolności kredytowej. W dalszych badaniach wykorzystana zostanie większa baza kredytobiorców, jednorodna pod względem rodzaju prowadzonej sprawozdawczości księgowej.

Literatura

- Altman E.I.: Financial Ratios. Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy. „Journal of Finance” 1968.
- Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M.: Wprowadzenie do sterowania rozmytego. WNT, Warszawa 1996.
- Gątarek D., Maksymiuk R., Krysiak M., Witkowski Ł.: Nowoczesne metody zarządzania ryzykiem finansowym. WIG-Press, Warszawa 2001.
- Janc A., Kraska M.: Credit-scoring. Nowoczesna metoda oceny zdolności kredytowej. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 2001.
- Józwiak J., Podgórski J.: Statystyka od podstaw. PWE, Warszawa 1997.
- Krysiak A., Staniszevska A., Wiatr M.S.: Zarządzanie portfelem kredytowym banku. SGH, Warszawa 2012.
- Lin Ch.-T., Lee C.S.G.: Neural Fuzzy Systems. A Neuro-fuzzy Synergism to Intelligent Systems. Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River 1996.
- Łachwa A.: Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji. Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa 2001.
- Matuszyk A.: Credit Scoring. CeDeWu, Warszawa 2008.
- Nowak E.: Zarys metod ekonometrii. PWN, Warszawa 1997.
- Peters J.: A Cognitive Computational Model of Risk Hypothesis Generation. „Journal of Accounting Research” 1990, No. 28.

¹² Ch.-T. Lin, C.S.G. Lee: Op. cit.; J. Turlej: Strategia i taktyka zarządzania ryzykiem kredytowym. „Bank i Kredyt” 1994, No. 1, s. 41-47.

- Piegat A.: Modelowanie i sterowanie rozmyte. Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa 1999.
- Paiva R.P., Douranto A.: Structure and Parametr Learning of Neuro-Fuzzy Systems: A Methodology and Comparative Study. „Journal of Intelligent & Fuzzy Systems” 2001, No. 11.
- Rejer I.: Integracja wiedzy w modelach rozmytych zależności ekonomicznych. Rozprawy i Studia. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2008.
- Turlej J.: Strategia i taktyka zarządzania ryzykiem kredytowym. „Bank i Kredyt” 1994, No. 1.
- Tanaka K.: An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications. Springer, Berlin 1997.
- Yager R.R., Filev D.P.: Podstawy modelowania i sterowania rozmytego. WNT, Warszawa 1995.
- Zadeh L.A.: Fuzzy Sets. „Information and Control” 1965, No. 8.
- Zadeh L.A.: The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-III. Information Sciences 9, American Elsevier Publishing Company, Inc. 1975.

APPLICATION OF FUZZY INFERENCE TO ASSESS THE CREDIT RISK OF ENTERPRISES

Summary

The article presents the credit risk assessment models based businesses on fuzzy logic. The starting point for the construction of models was to obtain data on 37 loans taken out by businesses in one of the largest co-operative bank, in Podlaskie. Bank in question does not use any statistical model to make credit decisions. The results of the classification in both the first and second fuzzy model provide a basis to conclude that a systematic approach expertise in fuzzy model based on historical data gives satisfactory results of the classification of borrowers.

Dorota Kuchta
Ewa Ptaszyńska
Politechnika Wrocławska

ROZMYTE DRZEWA DECYZYJNE JAKO NARZĘDZIE ZARZĄDZANIA RYZYKIEM PROJEKTÓW ROLNYCH

Wprowadzenie

Ryzyko projektowe może być definiowane w różny sposób. W niniejszym artykule będziemy stosować dwie różne definicje¹ wzajemnie się uzupełniające. Po pierwsze, ryzyko będzie rozumiane jako możliwe zdarzenie, które jeśli wystąpi, to swoim wystąpieniem może spowodować, że po zrealizowaniu projektu jego data zakończenia, koszt lub produkt końcowy nie będą zgodne z planem, a odchylenia od planu w przynajmniej jednym z tych trzech aspektów będą trudne lub niemożliwe do zaakceptowania². Tak rozumiane ryzyko może mieć różne atrybuty, w niniejszym artykule uwzględniane będą dwa podstawowe: prawdopodobieństwo wystąpienia i konsekwencje danego ryzyka, w przypadku gdyby wystąpiło. Przy takiej definicji ryzyka uzasadnione jest używanie tego słowa w liczbie mnogiej.

Inne rozumienie ryzyka to ryzyko jako zbiór wszystkich możliwych rodzajów ryzyka (według wcześniejszej definicji) dla danego projektu. Tak rozumiane słowo „ryzyko” może występować tylko w liczbie pojedynczej. Tak zdefiniowane ryzyko wymaga zagregowanej oceny, by można stwierdzić, czy dla danego projektu jest ono duże, małe czy średnie, akceptowalne lub niemożliwe do zaakceptowania. Problem tej oceny będzie tutaj pominięty, szczegóły można znaleźć w literaturze³.

¹ D. Hillson: *Managing Risk in Projects*. Bower Publishing, 2009, s. 17-19.

² H. Courtot: *La gestion des risques dans les projets*. Economica, Paryż 1998; D. Hillson: *Op. cit.*

³ Y.Y. Chong, E.M. Brown: *Zarządzanie ryzykiem projektu*. Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001; D. Hillson: *Managing Risk in Projects*. Bower Publishing, 2009, s. 17-19; H. Courtot: *La gestion des risques dans les projets*. Economica, Paryż 1998; C.L. Pritchard: *Zarządzanie ryzykiem w projektach. Teoria i praktyka*. WIG-Press, Warszawa 2001.

Ryzyko jest nieodłącznie związane ze wszystkimi projektami, w tym z projektami rolnymi. Ważne jest więc rozwijanie odpowiednich metod zarządzania ryzykiem projektowym. W niniejszym artykule zostanie rozważona jedna z takich metod – rozmyte drzewa decyzyjne. Naszym celem będzie sprawdzenie, jak dobrze rozmyte drzewa decyzyjne sprawdzają się w zarządzaniu ryzykiem projektów rolnych, które obarczone są dużym ryzykiem, zwłaszcza gdy są realizowane przez nowo powstałe przedsiębiorstwa rolne. Metoda ta została wykorzystana w systemie wspomagającym zarządzanie ryzykiem projektów europejskich, realizowanych przez polskie jednostki samorządu terytorialnego⁴.

Użyta metoda badawcza to adaptacja systemu na potrzeby przedsiębiorstw rolnych oraz eksperyment, polegający na próbie zastosowania zmodyfikowanego systemu w wybranym przedsiębiorstwie rolnym.

2. System oceny ryzyka projektu oparty na metodzie rozmytych drzew decyzyjnych

W literaturze⁵ opisano propozycję wykorzystania procesu uczenia się oraz rozmytych drzew decyzyjnych do zarządzania ryzykiem projektów współfinansowanych przez Unię Europejską, a realizowanych przez polskie jednostki samorządu terytorialnego. Zaproponowano tam system oceny ryzyka projektów oparty na metodzie rozmytych drzew decyzyjnych. System ten został pozytywnie zweryfikowany w praktyce w wybranej jednostce samorządowej.

Idea metody rozmytych drzew decyzyjnych i wspomnianego wyżej systemu opiera się na metodzie drzew probabilistycznych, zaproponowanej i zweryfikowanej dla projektów budowlanych⁶. Obie metody (drzew probabilistycznych i rozmytych) wychodzą z następujących założeń:

1. Między ryzykiem każdego projektu zachodzą zależności dotyczące ryzyka i atrybutów ryzyka, np. wynikające z faktu, że w danym projekcie jest wysoce prawdopodobne, iż dostawca nie dotrzyma terminu i jest średnio prawdo-

⁴ D. Kuchta, E. Ptaszyńska: The Concept of System Supporting Risk Management In European Projects. Information Systems Architecture and Technology. Eds. L. Borzemski, A. Grzech, J. Świątek, Z. Wilimowska. Politechnika Wrocławska, Wrocław 2011; D. Kuchta, E. Ptaszyńska: Zarządzanie ryzykiem poprzez uczenie się w projektach europejskich. W: Modelowanie preferencji a ryzyko '10. Red. T. Trzaskalik. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2010.

⁵ D. Kuchta, E. Ptaszyńska: Op. cit.; Ei: Op. cit.

⁶ V.T. Luu, S.Y. Kim, N.V. Tuan, S.O. Ogunlana: Quantifying Schedule Risk in Construction Projects Using Bayesian Belief Network. „International Journal of Project Management” 2009, Vol. 27(1), s. 39-50.

podobne, że nie będzie innego dostawcy, który mógłby zastąpić dostawcę pierwotnie wybranego, może w niektórych projektach wynikać, iż przekroczenie czasu realizacji o istotną ilość czasu jest wysoce prawdopodobne.

2. Zależności te są podobne czy wręcz takie same dla znakomitej większości projektów należących do tej samej klasy projektów i będących w tej samej fazie realizacji.

3. Po zakończeniu projektu eksperci mogą zweryfikować i lepiej niż przed realizacją projektu ocenić ryzyko, jego atrybuty oraz zależności istniejące między ryzykiem projektu i jego atrybutami, nawet jeśli nie wszystkie rodzaje ryzyka się zmaterializowały (tzn. nawet jeśli odpowiednie zdarzenia nie wystąpiły). Na przykład ekspert może powiedzieć, na ile prawdopodobne i potencjalnie poważne dla projektu były takie, a takie zdarzenia i na jakie inne rodzaje ryzyka miały one potencjalnie wpływ i jaki, nawet jeśli zdarzenia te ostatecznie nie wystąpiły (zagrożenia się nie zmaterializowały).

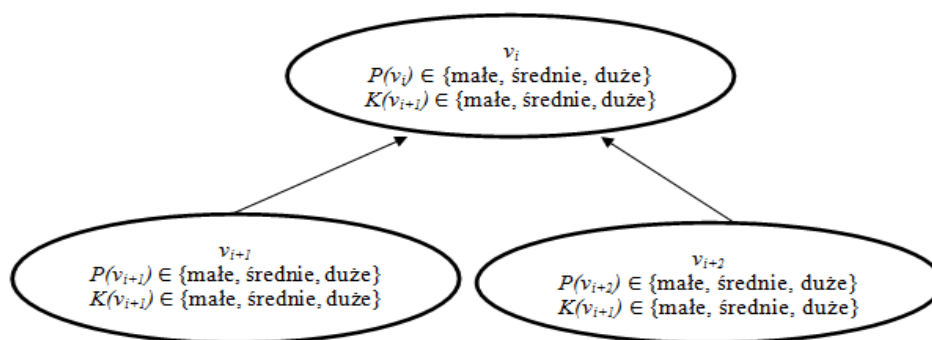
4. Informacje (zweryfikowane po zakończeniu projektów) na temat zależności między ryzykiem i jego atrybutami dla projektów już zakończonych, są bardzo przydatne do oceny ryzyka projektów z tej samej klasy projektów, rozpoczynanych czy planowanych albo wręcz dopiero rozważanych. Choć zdarza się oczywiście, że rozpatrywany projekt charakteryzuje się całkowicie innym ryzykiem niż projekty już zakończone, nawet z tej samej klasy projektów i z tej samej fazy realizacji, to jednak w znakomitej większości przypadków tak nie jest. Skorzystanie z wiedzy na temat ryzyka projektów z danej klasy i fazy realizacji, zwłaszcza na temat najczęściej występujących rodzajów ryzyka i zależności między nimi, okazało się (w omawianych przypadkach projektów budowlanych i jednostki samorządu terytorialnego) bardzo przydatne, nawet jeśli nie w każdym przypadku. Takie podejście usprawnia proces oceny ryzyka dla znakomitej większości nowych projektów, pozostawiając więcej czasu na ocenę ryzyka dla projektów nietypowych i zmniejszając liczbę projektów źle ocenionych pod względem ryzyka.

Rozmyte lub probabilistyczne drzewa są w systemie budowane dla każdego projektu (przed jego realizacją, na podstawie opinii ekspertów, a po niej są one weryfikowane) i reprezentują zależności między rodzajami ryzyka i ich atrybutami. Dla danej klasy projektów i fazy realizacji (klasy projektów i fazy realizacji są definiowane przez użytkowników systemu) powstaje w ten sposób jedno lub kilka drzew. Rozpatrując nowy projekt z danej klasy i fazy realizacji, użytkownik systemu może sięgnąć do tych drzew. Ocenia wówczas jedynie atrybuty ryzyka pierwotnego czy niezależnego (tzn. takiego, na które inne rodzaje ryzyka

nie mają wpływu, a które mają wpływ na inne), a atrybuty kolejnych rodzajów ryzyka, zależnych od innych, są wyznaczone z drzew dla projektów z danej klasy już zakończonych. Wybierane są te drzewa, które odpowiadają podanym przez ekspertów atrybutom ryzyka niezależnego. W przypadku niejednoznaczności, system proponuje drzewa, które były związane z największą liczbą projektów z danej klasy i fazy realizacji, pokazując użytkownikowi jednocześnie również pozostałe drzewa odpowiadające danej klasie projektów, fazie realizacji i kombinacji ryzyka niezależnego i jego atrybutów. W sytuacji, kiedy drzewa dla określonej kombinacji atrybutów ryzyka niezależnego w danej klasie projektów nie ma, użytkownikowi proponowane są drzewa podobne (przy określonej definicji podobieństwa). W każdym przypadku użytkownik może drzewo zmodyfikować, zmieniając atrybuty ryzyka lub dodając nowe, modyfikując jego atrybuty, zmieniając, usuwając lub dodając zależności między ryzykiem i jego atrybutami.

W rozmytych drzewach decyzyjnych każdy wierzchołek v_i ($i = 1 \dots n$) poza swoją nazwą (opisującą ryzyko, czyli możliwe zdarzenie) zawiera dwie zmienne rozmyte: prawdopodobieństwo P_i^h i konsekwencje K_i^h ($i = 1 \dots n$; $h = 1, 2, 3$), które wyrażone są za pomocą wyrażen słownych, przyjmując za każdym razem jedną z trzech wartości: „małe”, „średnie”, „duże”. Wyrażenia te są reprezentowane za pomocą liczb rozmytych, definiowanych przez użytkowników systemu⁷.

Rozpatrzmy przykładowy spłot wierzchołków w drzewie składający się z wierzchołka v_i oraz jego dwóch synów v_{i+1} i v_{i+2} (rys. 1).



Rys. 1. Przykład spłotu wierzchołków w drzewie rozmytym z wygenerowanym zbiorem reguł

Źródło: E. Ptaszyńska: Metoda zarządzania ryzykiem projektów. Wrocław 2012, s. 132.

⁷ D. Kuchta, E. Ptaszyńska: Op. cit.

W przypadku wierzchołków bez synów, tzw. liści drzewa (na rys. 1 – wierzchołki v_{i+1} i v_{i+2}) ocena P_{i+1}^h i K_{i+1}^h ($i = 1 \dots n$; $h = 1, 2, 3$) dokonywana jest przez osobę wypełniającą drzewo. Natomiast atrybuty wierzchołka, który posiada synów (na rys. 1 – wierzchołek v_i) są oceniane za pomocą reguł decyzyjnych, generowanych na podstawie przeszłych projektów dla danego typu projektu i fazy projektu. Każda reguła ma określoną moc, która oznacza, ile razy dana reguła pojawiła się w przeszłości dla danej przesłanki. Przy generowaniu drzew, w przypadku większej liczby reguł dla danej przesłanki, zawsze zaproponowana zostaje reguła z największą mocą, czyli ta, która pojawiła się najczęściej w przeszłości. Jeżeli co najmniej dwie reguły mają taką samą moc, to osoba tworząca drzewo musi samodzielnie wybrać jedną z nich. Z kolei jeżeli analizowana przesłanka nie wystąpiła w przeszłości, to system szuka przesłanki najbardziej podobnej. W przypadku niezalezienia podobnej przesłanki, należy dokonać samodzielnej oceny. Ponadto, osoba wypełniająca drzewo w każdym momencie może samodzielnie dokonać oceny prawdopodobieństwa czy konsekwencji, jeżeli nie zgadza się z wartościami oszacowanymi na podstawie reguł.

Na przykład, jeśli synowie z rys. 1 reprezentują zdarzenia „dostawca nie dotrzyma terminu” i „nie ma innego dostawcy”, to użytkownik powinien określić prawdopodobieństwa i konsekwencje tych zdarzeń dla rozpatrywanego projektu. Skupmy się na samym tylko prawdopodobieństwie (rozumowanie w przypadku konsekwencji byłoby identyczne). Załóżmy, że prawdopodobieństwo pierwszego ze zdarzeń zostało uznane za wysokie, a drugiego za średnie. Uznano również, że te dwa zdarzenia (ryzyko) i jego atrybuty mają wpływ na trzecie (na rys. 1 – wierzchołek v_i), na istotne przekroczenie terminu przez projekt i na jego atrybuty. Sięgamy do podobnych projektów z tej samej fazy realizacji i sprawdzamy, czy występowała już sytuacja „zdarzenie ‘dostawca nie dotrzyma terminu’ ma wysokie prawdopodobieństwo, a zdarzenie ‘nie ma innego dostawcy’ – dość wysokie” i czy oba te zdarzenia miały wpływ na zdarzenie „istotne przekroczenie terminu przez projekt”. Jeśli taka sytuacja była, to wiemy, że mamy przynajmniej jedną regułę typu: „Jeśli prawdopodobieństwo, że dostawca nie dotrzyma terminu jest wysokie i prawdopodobieństwo, że nie ma innego dostawcy jest średnie, to prawdopodobieństwo przekroczenia terminu o istotny termin jest x”, przy czym x może oznaczać „małe”, „średnie”, „duże” – zatem w rozpatrywanym prostym przykładzie możemy mieć maksymalnie trzy reguły.

Jeśli jest tylko jedna reguła z przesłanką „prawdopodobieństwo, że dostawca nie dotrzyma terminu jest wysokie i prawdopodobieństwo, że nie ma innego dostawcy jest średnie”, to system proponuje ocenę prawdopodobieństwa

przekroczenia terminu o istotny termin zgodnie z tą regułą. Jeśli jest ich więcej, użytkownikowi systemu pokazywane są wszystkie, ale system domyślnie proponuje tę, która wystąpiła najczęściej (czyli regułę o największej mocy).

Jeśli sytuacja „zdarzenie ‘dostawca nie dotrzyma terminu’ ma wysokie prawdopodobieństwo, a zdarzenie ‘nie ma innego dostawcy’ – dość wysokie” nie wystąpiła, nie mamy żadnej reguły dla rozpatrywanego projektu. W takiej sytuacji użytkownik może sam ocenić prawdopodobieństwo przekroczenia terminu o istotny termin lub skorzystać z proponowanych przez system reguł podobnych, jeśli takie wystąpiły. Nie wchodząc tu w definicję podobieństwa reguł⁸, regułą podobną (o podobnej przesłance) może być np. reguła „Jeśli prawdopodobieństwo, że dostawca nie dotrzyma terminu jest wysokie i prawdopodobieństwo, że nie ma innego dostawcy jest wysokie, to prawdopodobieństwo przekroczenia terminu o istotny termin jest wysokie” (przesłanka tej reguły różni się tylko w jednym atrybucie od przesłanek występujących na rys. 1). W przypadku przyjęcia tej reguły użytkownik oceniłby prawdopodobieństwo przekroczenia terminu o istotny termin jako wysokie.

Opisany proces tworzenia reguł jest powtarzany dla każdej konfiguracji wierzchołków w analizowanym drzewie (wierzchołek v_i z rys. 1 byłby jednym z synów kolejnych wierzchołków itd. i tak powstałoby drzewo⁹). Szczegóły dotyczące rozmytych reguł decyzyjnych, ich generowania i oceny podobieństwa można znaleźć w literaturze¹⁰.

Po zakończeniu rozpatrywanego projektu stosowane reguły, a także ryzyko i jego atrybuty zostałyby zweryfikowane. Zadano by m.in. pytanie, jakie faktycznie było w rozpatrywanym projekcie prawdopodobieństwo, że dostawca nie dotrzyma terminu, że nie ma innego dostawcy i że projekt skończy się z istotnym opóźnieniem. Dopiero zweryfikowane drzewo, a tym samym zweryfikowane reguły decyzyjne stałyby się częścią systemu i mogłoby być używane przy kolejnych projektach.

W opisywanym systemie rozpatrywano trzy podstawowe rodzaje drzew: drzewa ryzyka opóźnienia projektu, przekroczenia budżetu i niespełnienia wymagań jakościowych. W drzewach pierwszego typu wierzchołkiem szczytowym, tzn. tym, który nie wpływa na żaden inny wierzchołek, jest zdarzenie „projekt

⁸ L. de la Ossa, J.A. Gámez, J.M. Puerta: Learning Weighted Linguistic Fuzzy Rules by Using Specifically-tailored Hybrid Estimation of Distribution Algorithms. „International Journal of Approximate Reasoning” 2009, Vol. 50(3).

⁹ E. Ptaszyńska: Metoda zarządzania ryzykiem projektów. Wrocław 2012.

¹⁰ L. de la Ossa, J.A. Gámez, J.M. Puerta: Op. cit.

się istotnie opóźni”. Analogicznie definiowane są pozostałe dwa typy drzew. Jednak użytkownik może wprowadzić inne typy drzew, rozpatrując inne wierzchołki szczytowe.

Główne korzyści wynikające z zastosowania zaproponowanego systemu, zidentyfikowane przez pracowników wybranej jednostki samorządowej, to pomoc w identyfikowaniu, ograniczaniu bądź eliminowaniu poszczególnych rodzajów ryzyka; eliminowanie błędów związanych z zarządzaniem, w tym zarządzaniem ryzykiem i projektem, łatwy dostęp do wiedzy o potencjalnych zagrożeniach projektu, intuicyjność metody, większa świadomość ryzyka wśród osób zaangażowanych w projekty, archiwizacja wiedzy.

W artykule postanowiono przeprowadzić próbę zastosowania systemu opartego na rozmytych drzewach decyzyjnych do zarządzania ryzykiem projektów rolnych. Osoby zarządzające przedsiębiorstwami rolnymi, mimo doskonałej wiedzy w zakresie rolnictwa, rzadko są przygotowane do zarządzania ryzykiem projektów. Z przeprowadzonych wywiadów wynika, że osoby te szukają prostych, intuicyjnych metod, systemów, które by systematyzowały ich wiedzę i doświadczenie i podpowiadały pewne rozwiązania, które mogłyby one zweryfikować i ewentualnie zmodyfikować. Do tego dochodzi fakt, że wiele osób pracujących w przedsiębiorstwach rolnych posiada doświadczenie w prowadzeniu działalności rolnej i wiedzę na temat niepożądanych problemów, które mogą pojawić się w trakcie realizacji różnego rodzaju projektów, ale nie jest ona archiwizowana, przez co zanika, gdy doświadczeni pracownicy odchodząc „zabierają” ze sobą.

3. Wykorzystanie rozmytych drzew decyzyjnych do zarządzania ryzykiem projektów rolnych

Na wstępie należy podkreślić, że pod pojęciem projektów rolnych rozumiane są projekty realizowane przez wielkoobszarowe przedsiębiorstwa rolne. Wielkoobszarowe przedsiębiorstwa rolne to takie, w których wielkość powierzchni gruntów rolnych wynosi co najmniej 500 ha. W mniejszych przedsiębiorstwach rolnych wykorzystanie rozmytych drzew decyzyjnych nie miałoby sensu.

Aby móc zastosować system oparty na rozmytych drzewach decyzyjnych do zarządzania ryzykiem projektów rolnych, należało dokonać pewnych jego modyfikacji w stosunku do zaproponowanego systemu¹¹ przygotowanego pod kątem jednostek samorządowych, realizujących projekty europejskie. Na wstępie należało ustalić typy projektów rolnych, dla których będzie można analizować ryzyka. Na podstawie listy typów projektów zdecydowano, że osoba korzystająca z systemu zarządzania ryzykiem projektów rolnych będzie miała możliwość wyboru spośród następujących typów projektu:

- uprawa buraka cukrowego,
- uprawa zbóż (pszenica, jęczmień, owies, żyto lub pszenżyto),
- uprawa kukurydzy,
- uprawa rzepaku,
- uprawa słonecznika.

Niemniej jednak użytkownicy systemu mają również możliwość dodawania nowych typów projektów rolnych, które chcieliby przeanalizować, ale w takim przypadku muszą samodzielnie zdefiniować fazy projektu i utworzyć rozmyte drzewa decyzyjne.

Następnie należało zdefiniować fazy projektu rolnego, w ramach których będzie można identyfikować i oceniać ryzyko. Na podstawie analizy literatury i wywiadów z osobami zarządzającymi przedsiębiorstwami rolnymi wyróżniono następujące fazy cyklu życia projektu rolnego:

- planowanie projektu – faza obejmująca takie czynności, jak opracowanie płodozmianu, zakup nasion, nawozów, środków ochrony roślin, ustalenie harmonogramu zabiegów agrotechnicznych, przygotowanie sprzętu rolniczego,
- realizowanie projektu – faza obejmująca takie czynności, jak wykonanie podorywki i orki, nawożenie przedsiewne, uprawa przedsiewna, siew nasion, oprysk na chwasty – czynności wykonywane jesienią; nawożenie pogłównie (I dawka), oprysk na szkodniki, nawożenie pogłównie (II dawka), oprysk na choroby grzybowe i szkodniki – czynności wykonywane wiosną; zbiór uprawy, ewentualne suszenie, magazynowanie – czynności wykonywane latem,
- rozliczenie i zakończenie projektu – faza obejmująca takie czynności, jak sprzedaż uprawy oraz obliczenie zysków ze sprzedaży na podstawie poniesionych kosztów.

¹¹ D. Kuchta, E. Ptaszyńska: *The Concept...*, op. cit.; Eadem: *Zarządzanie ryzykiem...*, op. cit.

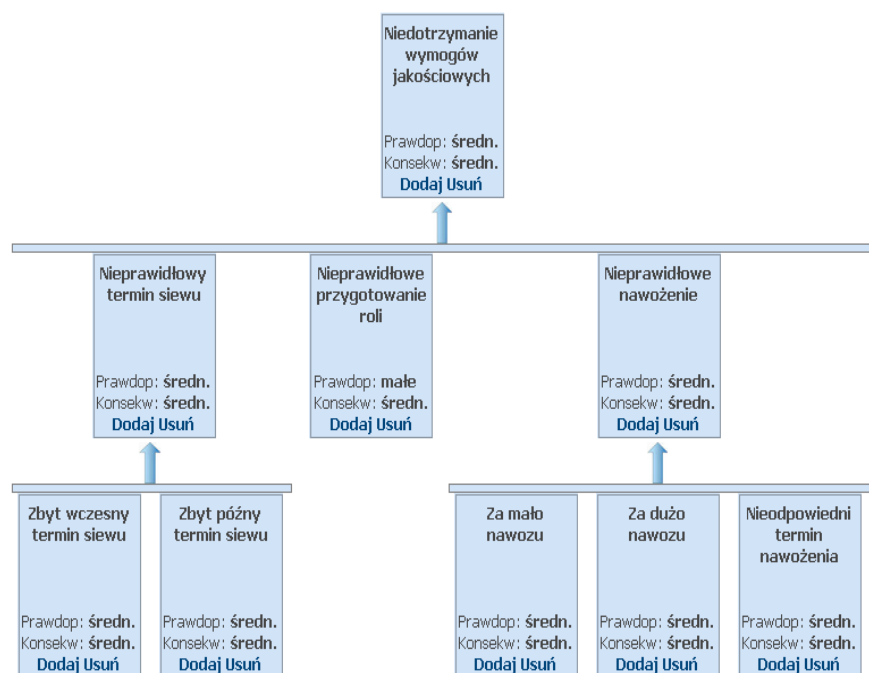
Po wyborze typu i fazy projektu użytkownik przechodzi do wyboru konkretnego projektu, który chce analizować. Są tu również dwie możliwości: można wybrać do analizy istniejący już projekt lub dodać nowy. Dla wybranego projektu rolnego użytkownik decyduje, który rodzaj ryzyka chce analizować: opóźnienie projektu, wzrost kosztów projektu czy niedotrzymanie wymagań jakościowych.

Po wykonaniu wyżej opisanych kroków następuje wyświetlenie drzew dla wybranego ryzyka i fazy projektu, które zostały utworzone na podstawie przeszłych projektów rolnych należących do tego samego typu projektu, co projekt analizowany przez użytkownika. Jeżeli w przedsiębiorstwie rolnym w przeszłości nie było tego typu projektów, to zostaje wyświetlone tylko jedno drzewo domyślne, zaproponowane przez system. Należy podkreślić, że drzewa domyślne w systemie są tylko propozycją stworzoną na podstawie analizy dokumentacji dotyczącej projektów rolnych oraz wywiadów z pracownikami i zarządem. Użytkownicy mogą je modyfikować. Natomiast jeżeli w przedsiębiorstwie rolnym w przeszłości były już tworzone i wypełniane drzewa dla danego ryzyka szczytowego, typu i fazy projektu, to zostają one wyświetlone. Zaproponowane drzewa można – tak jak w przypadku drzew domyślnych – dowolnie modyfikować.

4. Przebieg eksperymentu

Propozycja wykorzystania rozmytych drzew decyzyjnych do zarządzania ryzykiem projektów rolnych została przetestowana w wybranym wielkoobszarowym przedsiębiorstwie rolnym (powierzchnia gruntów rolnych równa 700 ha) na kilku projektach tego samego typu „uprawa rzepaku”. Niżej zostaną przedstawione przykłady, które ukazują, jak zdobywane doświadczenia usprawniają ocenę ryzyka i zarządzanie ryzykiem projektów w przedsiębiorstwach rolnych. Analizy dokonano na przykładzie kilku projektów typu „uprawa rzepaku”, ponieważ analizowane przedsiębiorstwo rolne dopiero od pewnego czasu zdecydowało się na uprawę akurat tej rośliny.

Na rys. 2 przedstawiono drzewo dla ryzyka szczytowego „niedotrzymanie wymagań jakościowych”, wypełnione dla projektu typu „uprawa rzepaku”, która w 2010 roku była realizowana po raz pierwszy w wybranym przedsiębiorstwie rolnym.



Rys. 2. Drzewo ryzyka „niedotrzymanie wymagań jakościowych” dla 1 projektu typu „uprawa rzepaku” w fazie jego planowania w 2010 roku

W drzewie przedstawionym na rys. 2 wierzchołki, zależności między nimi oraz atrybuty ustalili eksperci, ponieważ nie było jeszcze żadnej bazy wiedzy na temat projektów tego typu. Uznano, iż ryzyko niezależne (pierwotne), to:

- zbyt wczesny termin siewu,
- zbyt późny termin siewu,
- za mało nawozu,
- za dużo nawozu,
- nieodpowiedni termin nawożenia,
- nieprawidłowe przygotowanie roli.

Zaczęto od oceny atrybutów tych właśnie rodzajów ryzyka. Jeśli chodzi o prawdopodobieństwo, to najniżej zostało ocenione prawdopodobieństwo nieprawidłowego przygotowania roli pod zasiew. Wynikało to z faktu, że analizowane przedsiębiorstwo rolne miało już doświadczenie w uprawianiu innych roślin, więc nie było problemów z przygotowaniem roli. Natomiast większym ryzykiem były obciążone takie zdarzenia, jak nieprawidłowy termin siewu i nieprawidłowe nawożenie, które muszą być już odpowiednio dostosowane do danego typu uprawy.

Następnie uznano, że w przypadku rozpatrywanego projektu poprawne będzie wnioskowanie na podstawie następujących reguł:

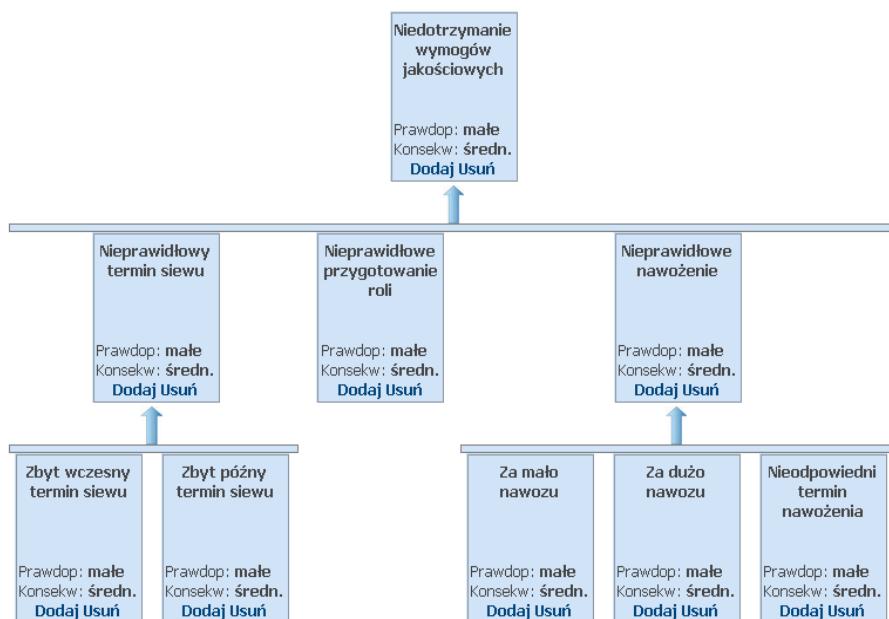
R1. JEŻELI „prawdopodobieństwo zbyt wczesnego terminu siewu” jest „średnie” I „prawdopodobieństwo zbyt późnego terminu siewu” jest „średnie” TO „prawdopodobieństwo nieprawidłowego terminu siewu” jest „średnie”.

R2. JEŻELI „prawdopodobieństwo zbyt małego nawożenia” jest „średnie” I „prawdopodobieństwo zbyt dużego nawożenia” jest „średnie” I „prawdopodobieństwo nieodpowiedniego terminu nawożenia” jest „średnie” TO „prawdopodobieństwo nieprawidłowego nawożenia” jest „średnie”.

R3. JEŻELI „prawdopodobieństwo nieprawidłowego terminu siewu” jest „średnie” I „prawdopodobieństwo nieprawidłowego przygotowania uprawy” jest „małe” I „prawdopodobieństwo nieprawidłowego nawożenia” jest „średnie” TO „prawdopodobieństwo niedotrzymania wymagań jakościowych” jest „średnie”.

Po zakończeniu projektu zweryfikowano drzewo z rys. 2: wierzchołki, powiązania, atrybuty poszczególnych zdarzeń, reguły decyzyjne i włączono je jako drzewo reprezentujące nabytą wiedzę na temat ryzyka niedotrzymania wymogów jakościowych w projektach typu „uprawa rzepaku”. Z tego drzewa skorzystano przy tworzeniu drzewa dotyczącego niedotrzymania warunków jakościowych dla następnego projektu typu „uprawa rzepaku”. Jednak ocena prawdopodobieństw ryzyka pierwotnego dokonana przez eksperta była już nieco inna, bo był to kolejny projekt tego samego typu. Wszystkie prawdopodobieństwa tych rodzajów ryzyka uznano za małe. Konsekwencje oceniono jednak tak samo, jak w pierwszym projekcie: jako średnie. Stąd konsekwencje ryzyka mającego synów, czyli: nieprawidłowego terminu siewu, nieprawidłowego nawożenia i ostatecznie niedotrzymania terminów jakościowych mogły być dla drugiego projektu wyznaczone automatycznie, na podstawie reguł z drzewa z rys. 1. Natomiast prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń dla nowego projektu, również tych mających synów, musiały być ocenione przez eksperta, bo nie było reguł z tymi samymi ani podobnymi przesłankami.

Na rys. 3 przedstawiono drzewo wypełnione (częściowo automatycznie, częściowo na podstawie wiedzy eksperckiej) dla drugiego realizowanego projektu w analizowanym przedsiębiorstwie rolnym, należącego do typu projektu „uprawa rzepaku”. Po zakończeniu drugiego projektu drzewo to zostało pozytywnie zweryfikowane przez ekspertów i włączone do bazy wiedzy dla projektów typu „uprawa rzepaku”, wraz z odpowiednimi regułami.



Rys. 3. Drzewo ryzyka „niedotrzymanie wymagań jakościowych” dla 2 projektu typu „uprawa rzepaku” w fazie jego planowania w 2011 roku

Jak widać na rys. 3, prawdopodobieństwo niespełnienia wymagań jakościowych projektu zostało zmniejszone do „małe”. Nastąpiło to dzięki wykorzystaniu doświadczeń z poprzedniego roku. Agronom wiedząc, że w poprzednim roku termin siewu był zbyt późny, tym razem lepiej dobrał jego termin. Ponadto wyeliminował błędy dotyczące nawożenia uprawy rzepaku. Dzięki powziętym działaniom ryzyko niedotrzymania wymagań jakościowych uległo zmniejszeniu.

Po zrealizowaniu drugiego projektu do bazy reguł zostały dodane nowe reguły:

R1. JEŻELI „prawdopodobieństwo zbyt wczesnego terminu siewu” jest „małe” I „prawdopodobieństwo zbyt późnego terminu siewu” jest „małe” TO „prawdopodobieństwo nieprawidłowego terminu siewu” jest „małe”.

R2. JEŻELI „prawdopodobieństwo zbyt małego nawożenia” jest „małe” I „prawdopodobieństwo zbyt dużego nawożenia” jest „małe” I „prawdopodobieństwo nieodpowiedniego terminu nawożenia” jest „małe” TO „prawdopodobieństwo nieprawidłowego nawożenia” jest „małe”.

R3. JEŻELI „prawdopodobieństwo nieprawidłowego terminu siewu” jest „małe” I „prawdopodobieństwo nieprawidłowego przygotowania uprawy” jest „małe” I „prawdopodobieństwo nieprawidłowego nawożenia” jest „małe” TO „prawdopodobieństwo niedotrzymania wymagań jakościowych” jest „małe”.

W trakcie realizacji trzeciego projektu (w 2012 roku) tego samego typu ekspert ocenił ryzyko niezależne na podstawie najnowszego drzewa (czyli tego z rys. 3), zaakceptował występujące tam reguły wnioskowania, w związku z tym zostało utworzone, a potem zweryfikowane, takie samo drzewo jak na rys. 3. Stąd też przed kolejnym projektem lista reguł będzie następująca: R1 (moc = 1), R2 (moc = 1), R3 (moc = 1), R4 (moc = 2), R5 (moc = 2) i R6 (moc = 2). Z tej bazy wiedzy można będzie korzystać (i ją ewentualnie uzupełniać) przy kolejnych projektach typu „uprawa rzepaku”. Baza złożona z dwóch drzew i sześciu reguł jest oczywiście bardzo uboga, jednak już ona pozwoliła przy drugim i trzecim projekcie zaoszczędzić czas poświęcony na analizę ryzyka i skorzystać z zebranych doświadczeń. Przy drugim projekcie prawdopodobieństwo ryzyka uległo zmniejszeniu w stosunku do projektu pierwszego, w dużej mierze właśnie dzięki zaproponowanemu systemowi, wymuszającemu uwzględnienie ryzyka i jego atrybutów z poprzednich, podobnych projektów.

W eksperymencie tworzone również drzewa dla ryzyka szczytowego „opóźnienie projektu”. Uczestnicy eksperymentu byli zadowoleni z testowanego systemu. Wiedzę na temat struktury drzew i poszczególnych atrybutów w zasadzie posiadali, jednak nie umieli jej formalizować i archiwizować. Zaproponowany system im to umożliwił. Właściciel gospodarstwa był zadowolony dlatego, że wiedział, iż wiedza na temat ryzyka w poszczególnych typach projektów będzie dostępna również dla ewentualnych przyszłych, niedoświadczonych pracowników. Zyskają oni w prosty sposób świadomość ryzyka w rozpatrywanych projektach, bo zobaczą, co się działo w projektach już zrealizowanych, zyskają również wsparcie w ocenie ryzyka w nowych projektach.

Podsumowanie

W niniejszym artykule przedstawiono wykorzystanie systemu opartego na rozmytych drzewach decyzyjnych, zaproponowanego wcześniej polskim jednostkom samorządu terytorialnego do zarządzania ryzykiem projektów rolnych realizowanych przez wielkoobszarowe przedsiębiorstwa rolne. Zaproponowane podejście w analizowanym przedsiębiorstwie rolnym okazało się trafne. Na podstawie analizy kolejnych projektów można było zaobserwować, jak następował proces uczenia się i jak korzystanie z doświadczeń wpływało na ograniczanie ryzyka projektów rolnych. Dzięki temu prawdopodobieństwo i konsekwencje wybranych rodzajów ryzyka uległy zmniejszeniu. Celem artykułu była odpowiedź na pytanie, czy rozmyte drzewa decyzyjne to dobra metoda do zarzą-

dzania ryzykiem projektów rolnych. Po przeprowadzonych analizach i wywiadach z pracownikami wybranego przedsiębiorstwa rolnego odpowiedź jest twierdząca. Oczywiście jest to jedynie wstępna weryfikacja, przeprowadzona na podstawie jednego przedsiębiorstwa rolnego i tylko na podstawie kilkunastu projektów. W dalszym etapie prac należałoby więc przetestować proponowane podejście na większej liczbie projektów i przedsiębiorstw rolnych.

Literatura

- Chong Y.Y., Brown E.M.: Zarządzanie ryzykiem projektu. Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.
- Courtot H.: La gestion des risques dans les projets. Economica, Paryż 1998.
- Hillson D.: Managing Risk in Projects. Bower Publishing, 2009.
- Kuchta D., Ptaszyńska E.: The Concept of System Supporting Risk Management In European Projects. Information Systems Architecture and Technology. Eds. L. Borzemeski, A. Grzech, J. Świątek, Z. Wilimowska. Politechnika Wrocławska, Wrocław 2011.
- Kuchta D., Ptaszyńska E.: Zarządzanie ryzykiem poprzez uczenie się w projektach europejskich. W: Modelowanie preferencji a ryzyko '10. Red. T. Trzaskalik. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2010.
- Luu V.T., Kim S.Y., Tuan N.V., Ogunlana S.O.: Quantifying Schedule Risk in Construction Projects Using Bayesian Belief Network. „International Journal of Project Management” 2009, Vol. 27(1).
- Ossa de la L., Gámez J.A., Puerta J.M.: Learning Weighted Linguistic Fuzzy Rules by Using Specifically-tailored Hybrid Estimation of Distribution Algorithms. „International Journal of Approximate Reasoning” 2009, Vol. 50(3).
- Pritchard C.L.: Zarządzanie ryzykiem w projektach. Teoria i praktyka. WIG-Press, Warszawa 2001.
- Ptaszyńska E.: Metoda zarządzania ryzykiem projektów. Wrocław 2012.
- Ptaszyńska E., Kuchta D.: Wykorzystanie procesu uczenia się w zarządzaniu ryzykiem projektów rolnych. przyjęte do druku w Wyższa Szkoła Oficerska, Wrocław 2013.

FUZZY DECISION TREES AS A TOOL OF AGRICULTURAL PROJECTS RISK MANAGEMENT

Summary

On the basis of interviews with persons managing Polish agricultural companies it was found out that, in spite of the fact that risk is often taken into account in the agri-

cultural activity, no risk management methods are used in agricultural projects (i.e. projects realized by agricultural companies). Thus in the paper a proposal is presented of using in agricultural project risk management a system based on fuzzy decision trees, put forward earlier by the authors for Polish self government units. In the paper the main traits of the system as well as selected steps of an experiment of the system application conducted in one of Polish agricultural companies are described.

Krzysztof Piasecki

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

ROZMYTA RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI STRUMIENI FINANSOWYCH

Wprowadzenie

Genezy przedstawionych w tym artykule rozważań należy szukać w dwóch rozważanych uprzednio niezależnie problemach poznawczych.

W literaturze¹ pojęto próbę wyjaśnienia istoty procesu aprecjacji kapitału. Wybrane wyniki przeprowadzonych tam analiz formalnych przedstawiono w rozdziale 1. Badania te m.in. pozwoliły spojrzeć na pojęcie wartości bieżącej w świetle teorii użyteczności. Podjęto też próbę zbudowania modelu formalnego wyjaśniającego paradoks utrzymywania się równowagi rynkowej na silnie efektywnym rynku finansowym pozostającym w stanie nierównowagi finansowej. Uzasadnienie i wybrane efekty tych prac zostały w szkicowy sposób przedstawione w rozdziale 2. Wartość bieżąca została tam oszacowana przy pomocy liczby rozmytej.

Głównym celem tego artykułu jest przedstawienie formalnych konsekwencji wynikających z zestawienia rezultatów badawczych opisanych w rozdziałach 1 i 2. Realizacji tego celu będzie służyć przedstawienie w rozdziale 3 rozmytej relacji równoważności pomiędzy strumieniami finansowymi. Pewien praktyczny przykład zastosowań tej relacji zostanie przedstawiony w rozdziale 4.

Wszystkie rezultaty badawcze zaprezentowane w tym artykule mają charakter pilotażowy i w głównej mierze służą wskazaniu nowego kierunku badań dowolnej przestrzeni przepływów finansowych.

¹ K. Piasecki: Podstawy arytmetyki finansowej w świetle teorii użyteczności. Księga Jubileuszowa Profesora Edwarda Smagi. UE, Kraków 2012; Idem: Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory. Operations Research and Decisions 2012, Vol. 3.

1. Wartość bieżąca w świetle teorii użyteczności

Fundamentalnym założeniem arytmetyki finansowej jest pewnik, że wartość pieniądza rośnie wraz z upływem czasu, po jakim będzie on spożytkowany. Założenie to jest uzasadniane na ogół poprzez analizę równania wymiany pieniądza² zaproponowanego przez Irvinga Fishera. W analizie tej korzysta się z dodatkowego założenia o stałej ilości pieniądza. Jest to typowo normatywne założenie i z tego względu rozpatrywaną w arytmetyce finansowej wartość pieniądza będziemy nazywać wartością normatywną pieniądza. Proces przyrostu wartości normatywnej nazywamy procesem aprecjacji kapitału. Jednak na ogół stosowana praktyka gospodarczo-finansowa powoduje przyrost ilości pieniądza szybszy od przyrostu wolumenu produkcji. Obserwujemy wtedy spadek wartości realnej pieniądza. Oznacza to, że wartości normatywnej pieniądza nie możemy identyfikować z jego wartością realną. Rodzi to pytanie o istotę pojęcia wartości normatywnej. Konsekwencją tego pytania jest kolejne pytanie o istotę podstawowych funkcji arytmetyki finansowej. Poszukiwano odpowiedzi na to pytanie. Zbudowano tam następujący model formalny.

Niech będzie dany zbiór momentów czasowych $\Theta \subseteq [0, +\infty[$. W szczególnym przypadku może to być zbiór momentów kapitalizacji lub nieujemna półprosta czasu. W analizie rynków finansowych każda z należności jest reprezentowana przez instrument finansowy opisany jako strumień finansowy (t, C) , gdzie symbol $t \in \Theta$ oznacza moment przepływu strumienia, natomiast symbol $C \in \mathbb{R}_0^+$ opisuje wartość nominalną tego przepływu. Zbiór wszystkich należności opisujemy jako produkt kartezjański $\Phi^+ = \Theta \times \mathbb{R}_0^+$. Na zbiorze tych należności każdy z inwestorów określa swoje preferencje. Preferencje te mają pewne wspólne cechy.

Referując podstawy teorii kapitału, von Mises³ przedstawił regułę preferencji czasowej. Reguła ta głosi, że przy uwzględnieniu zasady *ceteris paribus* podmiot ekonomiczny woli zaspokoić swoje potrzeby bądź osiągać postawione cele możliwie jak najszybciej. Inaczej mówiąc, kiedy podmiot ma przed sobą dwa cele o subiektywnie jednakowej wartości, to wyżej sobie ceni ten, który może osiągnąć w krótszym czasie. W szczególnym przypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie wpłaty o równej wartości nominalnej, preferuje zawsze wpłatę szybciej dostępną.

² Analiza taka została opisana np. w K. Piasecki, W. Ronka-Chmielowiec: *Matematyka finansowa*. C.H. Beck, Warszawa 2011.

³ L. Mises von: *The Ultimate Foundation of Economic Science. An Essay on Method*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1962.

Jest też oczywiste, że każdy podmiot ekonomiczny w swym działaniu kieruje się regułą preferencji majątkowej. Reguła ta oznacza, że przy uwzględnieniu zasady *ceteris paribus* podmiot ekonomiczny woli wchodzić we władanie możliwie jak najbardziej wartościowych przedmiotów ekonomicznych. Jeśli ma przed sobą dwa przedmioty ekonomiczne równocześnie dostępne, to wybiera ten, który charakteryzuje się większą subiektywną wartością. W szczególnym przypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie równocześnie dostępne wpłaty, wybiera zawsze wpłatę o wyższej wartości.

Równoczesne uwzględnienie obu tych preporządków prowadzi do ostatecznego określenia relacji preferencji $\succsim$ na zbiorze Φ^+ należności, jako porównania wielokryterialnego

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi^+: (t_1, C_1) \succsim (t_2, C_2) \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 \wedge C_1 \geq C_2 \quad (1)$$

Istnieje wtedy funkcja użyteczności $U: \Phi^+ \rightarrow [0, +\infty[$ spełniająca warunek

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi^+: (t_1, C_1) \succsim (t_2, C_2) \Rightarrow U(t_1, C_1) \geq U(t_2, C_2). \quad (2)$$

Użyteczność ta jest rosnącą funkcją wartości należności C i malejącą funkcją momentu t przepływu momentu czasowego. Określona w ten sposób funkcja użyteczności może mieć subiektywny charakter⁴. Przedstawiono⁵ rozszerzenie tego preporządku do zbioru $\Phi = \Theta \times \mathbb{R}$ wszystkich przepływów finansowych. Rozszerzenie to zachowuje monotoniczność funkcji użyteczności $U: \Phi \rightarrow [0, +\infty[$. Można wtedy między innymi pokazać, że

$$\forall t \in \Theta: U(t, 0) = 0 \quad (3)$$

Kwestią umowną jest wyskalowanie wartości funkcji użyteczności. Przyjmujemy tutaj, że użyteczność natychmiastowego przepływu finansowego jest równa wartości nominalnej tego przepływu. Założenie to zapisujemy, jako warunek brzegowy

$$\forall C \in \mathbb{R}: U(0, C) = C \quad (4)$$

Tak zdefiniowana funkcja użyteczności wyznacza następującą relację $\equiv$ równoważności strumieni finansowych

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi: (t_1, C_1) \equiv (t_2, C_2) \Leftrightarrow U(t_1, C_1) = U(t_2, C_2) \quad (5)$$

⁴ R. Dacey, P. Zielonka: A Detailed Prospect Theory Explanation of the Disposition Effect. „Journal of Behavioral Finance” 2005, Vol. 2/4.

⁵ K. Piasecki: Podstawy arytmetyki finansowej..., op. cit.; Idem: Basis of Financial..., op. cit.

Jeśli dwa strumienie finansowe są jednakowo użyteczne, to uważamy je za równoważne. O strumieniu finansowym równoważnym do danego mówimy, że jest ekwiwalentem tego ostatniego. Wartość nominalną dowolnego ekwiwalentu danego strumienia finansowego identyfikujemy, jako wartość normatywną tego strumienia.

Analiza monotoniczności funkcji użyteczności prowadzi nas do sformułowania zasady aprecjacji. Zasada ta głosi, że wartość normatywna należności rośnie wraz z czasem, po jakim należność ta będzie płatna. W ten sposób teoria użyteczności potwierdza fundamentalny pewnik arytmetyki finansowej głoszący, że wartość pieniądza rośnie wraz z upływem czasu.

W arytmetyce finansowej przedmiotem rozważań jest strumień finansowy (t, C) . Dla strumienia tego możemy określić jego ekwiwalent $(0, C_0)$. Wartość nominalną C_0 tego ekwiwalentu nazywamy wartością bieżącą i oznaczamy symbolem $PV(t, C)$. Zgodnie z definicją (5) relacji równoważności strumieni i warunkiem brzegowym (4) mamy tutaj tożsamość

$$C_0 = PV(t, C) = U(0, C_0) = U(t, C) \quad (6)$$

Wartość bieżąca dowolnego strumienia finansowego jest identyczna z jego użytecznością. Stwierdzenie to w pełni wyjaśnia istotę pojęcia wartości bieżącej. Dowolnej wartości bieżącej $PV: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ przysługują m.in. następujące właściwości

$$\forall C \in \mathbb{R}: PV(0, C) = C \quad (7)$$

$$\forall (t_1, C), (t_2, C) \in \Phi^+: t_1 < t_2 \Rightarrow PV(t_1, C) > PV(t_2, C) \quad (8)$$

$$\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi: C_1 < C_2 \Rightarrow PV(t, C_1) < PV(t, C_2) \quad (9)$$

Jednocześnie Peccati⁶ przedstawił aksjomatyczną definicję wartości bieżącej $PV: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$. Wartość bieżąca została tam zdefiniowana jako funkcji spełniającej warunki (7), (8) i warunek addytywności

$$\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi: PV(t, C_1) + PV(t, C_2) = PV(t, C_1 + C_2) \quad (10)$$

⁶ L. Peccati: Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione. Studium Parmense, Parma 1972.

Podejście to było już studiowane⁷. Aktualny stan wiedzy na temat konsekwencji aksjomatycznego podejścia do pojęcia wartości bieżącej został przedstawiony w pracy J. Janssen, R. Manca, E. Volpe di Prignano⁸.

Warunek (9) jest uogólnieniem warunku (10). W tej sytuacji wartość bieżąca zdefiniowana przy pomocy tożsamości (6) jest uogólnieniem klasycznego pojęcia wartości bieżącej w ujęciu Peccatiego.

Wykazanie, że wartość bieżąca danego strumienia finansowego jest identyczna z użytecznością tego strumienia wskazuje na subiektywny charakter pojęcia wartości bieżącej. W tej sytuacji otrzymujemy podwaliny teoretyczne pod budowę modeli finansów behawioralnych wykorzystujących subiektywne oceny wartości bieżącej. Wykorzystać tutaj możemy dorobek nauk ekonomicznych zgromadzony w zakresie teorii użyteczności.

Pokazano⁹, że pojęcie wartości bieżącej w ujęciu Peccatiego można uogólnić do przypadku, kiedy jest uwzględniany dodatkowo efekt dywersyfikacji inwestycji

$$\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi: \quad PV(t, C_1) + PV(t, C_2) \geq PV(t, C_1 + C_2) \quad (11)$$

Wartość bieżąca $PV: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wtedy, jako dowolną funkcję spełniającą warunki (7), (8) i (11).

Tak rozumiane pojęcie wartości bieżącej możemy z kolei uogólnić do przypadku, kiedy dodatkowo uwzględniane jest pierwsze prawo Gossena

$$\begin{aligned} \forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi^+ \quad \forall \alpha \in [0; 1] : \\ \alpha \cdot PV(t, C_1) + (1 - \alpha) \cdot PV(t, C_2) \leq PV(t, \alpha \cdot C_1 + (1 - \alpha) \cdot C_2) \end{aligned} \quad (12)$$

informujące o malejącej marginalnej użyteczności bogactwa. Wartość bieżącą $PV: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wtedy, jako dowolną funkcję spełniającą warunki (7), (8) i (12).

Najbardziej ogólną definicją wartości bieżącej jest określenie jej, jako dowolnej funkcji $PV: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunki (7), (8) i (9).

⁷ K. Piasecki: Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

⁸ J. Janssen, R. Manca, E. Volpe di Prignano: Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Models. John Wiley & Sons, London 2009.

⁹ K. Piasecki: Basis of Financial..., op. cit.

Na marginesie tej pracy warto też dostrzec, że arytmetykę finansową należy traktować jako rozszerzenie opartej na obiektywnych przesłankach teorii procentu. Wobec subiektywnych aspektów podejmowanej problematyki dynamicznej oceny pieniądza jest to rozszerzenie istotne.

2. Rozmyta wartość bieżąca

Zgromadzona wiedza o rynku finansowym stanowi jedyną przesłankę merytoryczną do wyznaczenia ceny równowagi finansowej C_0 rozważanego instrumentu finansowego. Cena ta jest interpretowana jako zdyskontowana wartość bieżąca (PV) przyszłych przepływów finansowych związanych z tym instrumentem finansowym. O rozważanym rynku finansowym będziemy zakładać, że jest w pełni efektywny. W tej sytuacji wszyscy uczestnicy rynku przyjmują identyczną wartość C_0 ceny równowagi. Równocześnie wszyscy ci uczestnicy rynku obserwują tę samą wartość $\check{C}$ ceny rynkowej. Znajomość obu tych wartości wystarcza racjonalnego do uzasadnienia podejmowanych decyzji inwestycyjnych. Dla przypadku

$$\check{C} < C_0 \quad (13)$$

racjonalne przesłanki sugerują kupno danego instrumentu finansowego. Zakup taki jest możliwy jedynie wtedy, kiedy pojawi się oferta jego sprzedaży. Naturalnym jest tutaj pytanie, jakimi przesłankami kieruje się inwestor sprzedający taki papier wartościowy. Podobnie, dla przypadku

$$\check{C} > C_0 \quad (14)$$

racjonalne przesłanki jednoznacznie sugerują sprzedaż rozważanego instrumentu finansowego. Sprzedaż taka jest możliwa jedynie wtedy, kiedy pojawi się oferta jego kupna. Rodzi to pytanie, jakimi przesłankami kieruje się inwestor kupujący ten papier wartościowy.

Odpowiedź na powyższe dwa pytania może być tylko jedna. Na dowolnym efektywnym rynku finansowym równowaga rynkowa pomiędzy popytem i podażą może być osiągnięta pod wpływem behawioralnych przesłanek. Problem ten był szczegółowo rozważany¹⁰, gdzie do rozwiązania tego problem zaproponowano zastosowanie pojęcia behawioralnej wartości bieżącej (BPV) zdefinio-

¹⁰ Idem: Podstawy arytmetyki..., op. cit.; Idem: Basis of Financial..., op. cit.

wanej jako liczba rozmyta określona przez swą funkcję przynależności $\mu(\cdot|\alpha, \Delta C) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$. Przebieg zmienności tej funkcji przynależności zależy od odchylenia

$$\Delta C = \check{C} - C_0 \quad (15)$$

ceny rynkowej od ceny równowagi oraz od parametru $\alpha \in [0; 1]$ opisującego stopień oddziaływania fenomenu konserwatyzmu poznawczego opisanego na gruncie psychologii przez Edwardsa¹¹. Fenomen ten jest uwzględniany w wielu behawioralnych modelach rynku finansowego. Można zapoznać się z dyskusją na ten temat¹². Wykazano, że tak określony model BPV dobrze służy wyjaśnieniu paradoksu równowagi rynkowej na w pełni efektywnym rynku finansowym.

Propozycja przedstawienia wartości bieżącej, jako liczby rozmytej jest już dobrze ugruntowana ideą. Koncepcja zastosowania liczb rozmytych w arytmetyce finansowej wywodzi się od Buckleya¹³. Definicję Peccatiegio do przypadku rozmytego uogólnił Calzi¹⁴. Ward¹⁵ definiuje rozmytą PV, jako zdyskontowaną rozmytą prognozę przyszłego przepływu finansowego. Definicja Warda jest uogólniona¹⁶ do przypadku nieprecyzyjnie oszacowanego odroczenia. Sheen uogólnia definicję Warda do przypadku rozmytej stopy nominalnej. Buckley (1987, 1992), Gutierrez (1989), Kuchta (2000) i Lesage (2001) dyskutują problemy związane z zastosowaniem rozmytej arytmetyki do wyznaczania rozmytej PV. Huang¹⁷ uogólnia definicję Warda do przypadku, kiedy przyszły przepływ finansowy jest dany, jako rozmyta zmienna losowa. Bardziej ogólna definicja rozmytej PV jest proponowana przez Tsao¹⁸ zakładającego, że przyszły przepływ finansowy jest określony, jako rozmyty zbiór probabilistyczny.

¹¹ W. Edwards: *Conservatism in Human Information Processing*. W: *Formal Representation of Human Judgment*. Red. B. Klienmutz. Wiley, New York 1968.

¹² N. Barberis, A. Shleifer, R. Vishny: *A Model of Investor Sentiment*. „*Journal of Financial Economics*” 1998, Vol. 49.

¹³ I.J. Buckley: *The Fuzzy Mathematics of Finance*. „*Fuzzy Sets and Systems*” 1987, Vol. 21.

¹⁴ M.L. Calzi: *Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance*. „*Fuzzy Sets and Systems*” 1990, Vol. 35.

¹⁵ T.L. Ward: *Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis*. 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, 1985.

¹⁶ J.G. Greenhut, G. Norman, C.T. Temponi: *Towards A Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition*. IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS 1995.

¹⁷ X. Huang: *Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information*. „*European Journal of Operational Research*” 2007, Vol. 180(1).

¹⁸ C.-T. Tsao: *Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value for a Capital, Investment Choice Using Fuzzy Arithmetic*. „*J. of Chin. Ins. of Industrial Engineers*” 2005, Vol. 22(2).

3. Przybliżona równoważność strumieni finansowych

Rozważamy przestrzeń finansową (Φ, PV) , gdzie $PV: \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną ustaloną wartością bieżącą spełniającą warunki (7), (8) i (9). Funkcja ta każdemu strumieniowi finansowemu $(t, C) \in \Phi$ przypisuje jego normatywną wartość bieżącą (PPV Prescriptive Present Value – Prescriptive Present Value)

$$C_0 = PV(t, C) \quad (16)$$

W rozdziale 2 zwrócono uwagę, że wartość bieżąca może być w przybliżeniu oszacowana za pomocą liczby rozmytej. Zgodnie z definicją¹⁹ podaną w (Dubois, Prade, 1979), dowolna liczba rozmyta reprezentująca przybliżenie liczby $l \in \mathbb{R}$ jest zdefiniowana za pomocą swej funkcji przynależności $\mu(\cdot | l) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ spełniającej warunki

$$\mu(l|l) = 1 \quad (17)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \leq z \Rightarrow \mu(y|l) \geq \min\{\mu(x|l), \mu(z|l)\} \quad (18)$$

Inwestor, oceniając przybliżenia poszczególnych wariantów wartości bieżącej, określa rodzinę indeksowaną $\{\nu(\cdot | C): C \in \mathbb{R}\} \subset [0; 1]^{\mathbb{R}}$. W ten sposób przybliżenie dowolnej wartości $C \in \mathbb{R}$ jest reprezentowane przez dokładnie jedną funkcję przynależności $\nu(\cdot | C) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ spełniająca warunki (17) i (18). Powoduje to, że dowolną normatywną wartość bieżącą inwestor może zastąpić przez jej przybliżenie. W ten sposób zostaje wprowadzona szacunkowa wartość bieżąca (EPV – Estimated Present Value) zdefiniowana jako funkcja $\widetilde{PV}: \Phi \rightarrow [0; 1]^{\mathbb{R}}$ określona przy pomocy tożsamości

$$\widetilde{PV}(t, C) = \nu(\cdot | PV(t, C)) \quad (19)$$

EPV każdemu strumieniowi finansowemu przypisuje funkcję przynależności przybliżenia jego PPV. W rozdziale 1 przypomniano, że wartość bieżąca strumienia finansowego może być identyfikowana z jego użytecznością. Korzystając teraz z (6) możemy określić rozmytą użyteczność strumieni finansowych, jako funkcję $\widetilde{U}: \Phi \rightarrow [0; 1]^{\mathbb{R}}$ określoną za pomocą tożsamości

$$\widetilde{U}(t, C) = \widetilde{PV}(t, C) \quad (20)$$

¹⁹ J. Dubois, H. Prade: Fuzzy Real Algebra: Some Results. „Fuzzy Sets and Systems” 1979, Vol. 2.

Zdefiniowana wyżej funkcja użyteczności jest rozmytym uogólnieniem klasycznej funkcji użyteczności zdefiniowanej za pomocą równoważności (2). Idea stosowania rozmytej użyteczności pochodzi od Nakamury²⁰.

Wyznaczona użyteczność (20) pozwala nam na określenie przybliżonej relacji $\approx$ równoważności strumieni

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi: (t_1, C_1) \approx (t_2, C_2) \Leftrightarrow \tilde{U}(t_1, C_1) \approx \tilde{U}(t_2, C_2) \quad (21)$$

gdzie symbol $\approx$ oznacza relację równości określoną na zbiorze liczb rozmytych. Jeśli relacja ta jest wyznaczana z zachowaniem zasady rozszerzenia Zadeha, to wtedy funkcja przynależności $\varrho \in [0; 1]^{\Phi \times \Phi}$ relacji równoważności (21) jest wyznaczona za pomocą tożsamości

$$\varrho((t_1, C_1), (t_2, C_2)) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{v(x|PV(t_1, C_1)) \wedge v(x|PV(t_2, C_2))\} \quad (22)$$

Tak zdefiniowana przybliżona równoważność strumieni finansowych jest rozmytym uogólnieniem relacji równoważności. Interpretacją wartości (22) funkcji przynależności jest stopień, w jakim strumień finansowy (t_1, C_1) jest ekwiwalentem strumienia finansowego (t_2, C_2) . Stopień ten zależy od czynników obiektywnych i behawioralnych. Poza wzajemnym przestrzennym położeniem strumieni finansowych, głównym czynnikiem obiektywnym są właściwe stopy procentowe rynków finansowych. Przykładami czynników behawioralnych są tutaj subiektywne postrzeganie rynków finansowych oraz fenomen konserwatyzmu poznawczego. Stosowanie rozmytej relacji równoważności (21) pozwala na uwzględnienie tych wszystkich bardzo odmiennych czynników poznawczych przy pomocy pojedynczego narzędzia analizy rynków finansowych. Poniżej podany zostanie jeden przykład takich zastosowań.

4. Rozmyty okres obrachunkowy

Okresem obrachunkowym nazywamy taki okres, w którym analizując przepływy finansowe możemy pominąć efekt aprecjacji kapitału. Wszystkie występujące w takim okresie strumienie finansowe o identycznej wartości nominalnej przepływów uważamy za równoważne. Do rejestracji i oceny poszczególnych równoważnych przepływów finansowych możemy stosować narzędzia rachunkowości finansowej. W Polsce ustawowy okres obrachunkowy trwa 12 kolejnych miesięcy.

²⁰ K. Nakamura: Preference Relations on A Set of Fuzzy Utilities As A Basis for Decision Making. „Fuzzy Sets and Systems” 1986, Vol. 20(2).

W warunkach inflacji, kiedy wzrastają także stopy rynków finansowych, równoważność wszystkich strumieni finansowych ujawniających się w ustawowym okresie obrachunkowym jest problematyczna. Zaleca się wtedy prowadzenie na własne zarządcze potrzeby dodatkowej rachunkowości finansowej dostosowanej do warunków inflacji. Metody te szeroko omawia S. Sojak²¹. Zaleca się tam m.in. wyznaczanie podokresów rachunkowych o długości dostosowanej do wysokości inflacji.

Przy opisie takiego okresu obrachunkowego zastosowanie może znaleźć opisana powyżej relacja $\approx$ przybliżonej równoważności strumieni finansowych.

Weźmy pod uwagę dowolną ustaloną wartość nominalną $C \in \mathbb{R}$. W początkowym momencie czasu $t_0 = 0$ okres obrachunkowy $\Delta(C)$ definiujemy, jako zbiór wszystkich momentów $t \in \Theta$ takich, że strumień finansowy (t, C) jest równoważny strumieniowi finansowemu $(0, C)$. Postępując w ten sposób postać okresu obrachunkowego uzależniamy od rozpatrywanej wartości nominalnej $C \in \mathbb{R}$. Jest to zgodne z wynikami eksperymentów poświęconych intuicyjnemu dyskontowaniu odroczonej wypłaty. Te empiryczne badania stanowią jeden z nurtów poznawczych finansów behawioralnych²².

Stosując relację $\approx$ przybliżonej równoważności strumieni finansowych, funkcję przynależności $\delta(\cdot | C) \in [0; 1]^\Theta$ okresu obrachunkowego $\Delta(C)$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$\delta(t|C) = \varrho((0, C), (t, C)) \quad (23)$$

Korzystając teraz z zależności (7) i (22) ostatecznie otrzymujemy

$$\delta(t|C) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{v(x|C) \wedge v(x|PV(t, C))\} \quad (24)$$

Można wykazać, że warunek (18) jest warunkiem dostatecznym na to, aby funkcja przynależności $\delta(\cdot | C)$ była nierosnącą funkcją czasu. Jeśli teraz określimy minimalny akceptowany stopień $\alpha \in [0; 1]$ równoważności strumieni finansowych, to maksymalnie długi okres obrachunkowy $\Delta(C)$ jest przedziałem

$$\Delta(C) = [0, T_\alpha(C)] \quad (25)$$

²¹ S. Sojak: Rachunkowość finansowa w warunkach inflacji. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Warszawa 1996.

²² W. Du, L. Green, J. Myerson: Cross-cultural Comparisons of Discounting Delayed and Probabilistic Rewards. „Psychological Record” 2002, Vol. 52; K.N. Kirby, M. Santiesteban: Concave Utility, Transaction Costs and Risk in Measuring Discounting of Delayed Rewards. „Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory and Cognition” 2003, Vol. 29; M.K. Shelley: Outcome Signs, Question Frames and Discount Rates. Management Sciences 1993, Vol. 39.

gdzie

$$T_\alpha(C) = \sup_{t \in \Theta} \left\{ t : \sup_{x \in \mathbb{R}} \{v(x|C) \wedge v(x|PV(t, C))\} = \alpha \right\} \quad (26)$$

W przypadku ograniczenia analizy strumieni finansowych do zastosowania jedynie nierozmytej relacji równoważności byłibyśmy pozbawieni możliwości przeprowadzenia takiej analizy.

5. Studium przypadku

Rozważamy dowolny ustalony zbiór $\Phi = \Theta \times \mathbb{R}$ przepływów finansowych. Dla ustalonego $C^* \in \mathbb{R}_0^+$ definiujemy funkcję $pv(\cdot|C^*): \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$pv(0|C^*) = C^* \quad (26)$$

$$\forall t_1, t_2 \in \Theta: t_1 < t_2 \Rightarrow pv(t_1|C^*) > pv(t_2|C^*) \quad (27)$$

Wartość $pv(t|C^*)$ interpretujemy, jako PV przepływu finansowego (t, C^*) . W praktyce finansów wartość $pv(t|C^*)$ ustalamy, jako cenę rynkową instrumentu finansowego reprezentującego przepływ (t, C^*) . Funkcja ta może pełnić funkcję punktu odniesienia do zdefiniowania PV dowolnego przepływu finansowego.

Dla dowolnego $\gamma \geq 0$ wartość bieżącą $PV(\cdot|\gamma): \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$PV(t, C|\gamma) = \frac{C}{C^*} \cdot \left| \frac{C}{C^*} \right|^{\frac{-\gamma \cdot t}{1+\gamma}} \cdot pv(t|C^*) \quad (28)$$

Parametr $\gamma \geq 0$ może być interpretowana, jako współczynnik awersji do ryzyka obarczającego dowolnie późny przepływ finansowy. Bezpośrednio z warunków (26) i (27) wynika, że opisana powyżej funkcja spełnia (7) i (8). Stosując elementarny rachunek różnicowy można wykazać, że spełniony tutaj jest też warunek (12). Jednak dla $\gamma > 0$ nie jest spełniony warunek (10). Wszystko to oznacza, że zależność (28) opisuje funkcję PV niespełniającą warunku addytywności Peccatiego i równocześnie spełniającą pierwsze prawo Gossena. Szczegółowe uzasadnienie postaci funkcjonatu (28) można znaleźć w pracy K. Piasecki²³. W dalszych rozważaniach wartości funkcji (28) będą odgrywać rolę PPV.

²³ K. Piasecki: Wartość bieżąca a pierwsze prawo Gossena – studium przypadku (w druku).

Wielokrotnie, nawet w przypadku przepływu finansowego (t, C^*) trudno jest jednoznacznie określić jego PV. Z tej przyczyny, definiujemy funkcje $pv_*(\cdot | C^*): \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ i $pv^*(\cdot | C^*): \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki (26), (27) i

$$\forall t \in \Theta: pv_*(t | C^*) \leq pv(t | C^*) \leq pv^*(t | C^*) \quad (29)$$

Wartości $pv_*(t | C^*)$ i $pv^*(t | C^*)$ interpretujemy, jako odpowiednio oszacowania dolne i górne PV przepływu finansowego (t, C^*) .

Oszacowania wartość bieżącej, dolne $PV_*(\cdot | \gamma): \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ i górne $PV^*(\cdot | \gamma): \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$PV_*(t, C | \gamma) = \frac{C}{C^*} \cdot \left| \frac{C}{C^*} \right|^{\frac{-\gamma \cdot t}{1+t}} \cdot pv_*(t | C^*) \quad (30)$$

$$PV^*(t, C | \gamma) = \frac{C}{C^*} \cdot \left| \frac{C}{C^*} \right|^{\frac{-\gamma \cdot t}{1+t}} \cdot pv^*(t | C^*) \quad (31)$$

EPV może przyjąć postać rozmytej liczby trójkątnej (Kuchta, 2000) o nośniku ograniczonym przez dolne i oszacowania PPV. Wtedy funkcja przynależności $v(\cdot | PV(t, C)) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ zastosowana w (19) do określenia EPV przyjmuje postać

$$v(x | PV(t, C)) = \begin{cases} 0 & x \notin]PV_*(t, C | \gamma), PV^*(t, C | \gamma)[\\ \frac{x - PV_*(t, C | \gamma)}{PV(t, C | \gamma) - PV_*(t, C | \gamma)} & x \notin]PV_*(t, C | \gamma), PV(t, C | \gamma)[\\ 1 & x = PV(t, C | \gamma) \\ \frac{x - PV(t, C)}{PV^*(t, C | \gamma) - PV(t, C | \gamma)} & x \notin]PV(t, C | \gamma), PV^*(t, C | \gamma)[\end{cases} \quad (32)$$

Dla określenia stopnia zachodzenia relacji równoważności pomiędzy przepływami finansowymi (t_1, C_1) i (t_2, C_2) koniecznym jest wyznaczenie wartości

$$\begin{aligned} a_* &= PV_*(t_1, C_1 | \gamma), & a &= PV(t_1, C_1 | \gamma), & a^* &= PV^*(t_1, C_1 | \gamma) \\ b_* &= PV_*(t_2, C_2 | \gamma), & b &= PV(t_2, C_2 | \gamma), & b^* &= PV^*(t_2, C_2 | \gamma) \end{aligned}$$

Funkcja przynależności $q \in [0; 1]^{\Phi \times \Phi}$ relacji równoważności (21) jest wtedy określona następująco

$$q((t_1, C_1), (t_2, C_2)) = \begin{cases} 0 &]a_*, a^*[\cap]b_*, b^*[= \emptyset \\ \frac{b^*a - a_*b^* - a_*a + a_*^2}{b^* - b + a - a_*} &]a_*, a^*[\cap]b_*, b^*[= \emptyset \wedge b < a \\ 1 & a = b \\ \frac{a^*b - b_*a^* - b_*b + b_*^2}{a^* - a + b - b_*} &]a_*, a^*[\cap]b_*, b^*[= \emptyset \wedge b > a \end{cases} \quad (33)$$

Z warunku (26) wnioskujemy, że EPV dowolnego bieżącego przepływu finansowego $(0, C)$ jest liczbą nierozmytą. Dzięki temu spostrzeżeniu funkcję przynależności $\delta(\cdot | C) \in [0; 1]^{\Theta}$ okresu obrachunkowego $\Delta(C)$ jest określona przez tożsamość

$$\delta(t|C) = v(C|PV(t, C)) \quad (34)$$

co pozwala nam zapisać

$$\delta(t|C) = \begin{cases} 0 & C \geq PV^*(t, C) \\ \frac{PV^*(t, C|\gamma) - C}{PV^*(t, C|\gamma) - PV(t, C|\gamma)} & C < PV^*(t, C) \end{cases} \quad (35)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\delta(t|C) = \begin{cases} 0 & C \geq PV^*(t, C) \\ \frac{pv^*(t|C^*) - C^* \left| \frac{C}{C^*} \right|^{\frac{\gamma \cdot t}{1+\gamma}}}{pv^*(t|C^*) - pv(t|C^*)} & C < PV^*(t, C) \end{cases} \quad (36)$$

Dla założonego poziomu akceptacji $\alpha \in [0; 1]$ długość $T_{\alpha}(C)$ okresu obrachunkowego $\Delta(C)$ jest jedynym pierwiastkiem równania

$$\frac{pv^*(t|C^*) - C^* \left| \frac{C}{C^*} \right|^{\frac{\gamma \cdot t}{1+\gamma}}}{pv^*(t|C^*) - pv(t|C^*)} = \alpha \quad (37)$$

Podsumowanie

W artykule pokazano, że nieprecyzyjnie określona wartość bieżąca prowadzi wprost do zainicjowania rozmytej analizy przestrzeni strumieni finansowych. W ostatnim rozdziale pokazano, że takie uogólnienie klasycznego podejścia stworzą nowe możliwości aplikacyjne. To spostrzeżenie zachęca do podjęcia dalszych badań nad zaproponowanym uogólnieniem.

Z praktycznego punktu widzenia ciekawych wyników można tutaj oczekiwać po zastosowaniu explicite opisanych funkcji PV oraz explicite opisanych typów liczb rozmytych stosowanych do opisu szacunkowej wartości bieżącej.

Model nieprecyzyjnie określonego okresu obrachunkowego wymaga także dalszych badań empirycznych. Zgodnie z metodami badawczymi stosowanymi w finansach behawioralnych badania takie powinny być przeprowadzone w warunkach wysokiej inflacji.

Literatura

- Barberis N., Shleifer A., Vishny R.: A Model of Investor Sentiment. „Journal of Financial Economics” 1998, Vol. 49.
- Buckley I.J.: The Fuzzy Mathematics of Finance. „Fuzzy Sets and Systems” 1987, Vol. 21.
- Calzi M.L.: Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance. „Fuzzy Sets and Systems” 1990, Vol. 35.
- Dacey R., Zielonka P.: A Detailed Prospect Theory Explanation of the Disposition Effect. „Journal of Behavioral Finance” 2005, Vol. 2/4.
- Dubois J., Prade H.: Fuzzy Real Algebra: Some Results. „Fuzzy Sets and Systems” 1979, Vol. 2.
- Du W., Green L., Myerson J.: Cross-cultural Comparisons of Discounting Delayed and Probabilistic Rewards. „Psychological Record” 2002, Vol. 52.
- Edwards W.: Conservatism in Human Information Processing. W: Formal Representation of Human Judgment. Red. B. Klienmutz. Wiley, New York 1968.
- Greenhut J.G., Norman G., Temponi C.T.: Towards A Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition. IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS 1995.
- Gutierrez I.: Fuzzy Numbers and Net Present Value. „Scand. J. Mgmt” 1989, Vol. 5(2).
- Huang X.: Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information. „European Journal of Operational Research” 2007, Vol. 180(1).
- Janssen J., Manca R., Volpe di Prignano E.: Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Models. John Wiley & Sons, London 2009.
- Kirby K.N., Santiesteban M.: Concave Utility, Transaction Costs and Risk in Measuring Discounting of Delayed Rewards. „Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory and Cognition” 2003, Vol. 29.
- Kuchta D.: Fuzzy Capital Budgeting. „Fuzzy Sets and Systems” 2000, Vol. 111.
- Lesage C.: Discounted Cash-flows Analysis. An Interactive Fuzzy Arithmetic Approach. „European Journal of Economic and Social Systems” 2001, Vol. 15(2).
- Mises L. von: The Ultimate Foundation of Economic Science. An Essay on Method. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1962.
- Nakamura K.: Preference Relations on A Set of Fuzzy Utilities As A Basis for Decision Making. „Fuzzy Sets and Systems” 1986, Vol. 20(2).
- Peccati L.: Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell’attualizzazione. Studium Parmense, Parma 1972.
- Piasecki K.: Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- Piasecki K.: Behavioural Present Value. „Behavioral & Experimental Finance Journal” 2011, Vol. 4. <http://ssrn.com/abstract=1729351>.
- Piasecki K.: Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych. UE, Poznań 2011.
- Piasecki K.: Podstawy arytmetyki finansowej w świetle teorii użyteczności. Księga Jubileuszowa Profesora Edwarda Smagi. UE, Kraków 2012.
- Piasecki K.: Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory. Operations Research and Decisions 2012, Vol. 3.

- Piasecki K.: Wartość bieżąca a pierwsze prawo Gossena – studium przypadku (w druku).
- Piasecki K., Ronka-Chmielowiec W.: Matematyka finansowa. C.H. Beck, Warszawa 2011.
- Shelley M.K.: Outcome Signs, Question Frames and Discount Rates. *Management Sciences* 1993, Vol. 39.
- Sojak S.: Rachunkowość finansowa w warunkach inflacji. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Warszawa 1996.
- Tsao C.-T.: Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value for a Capital, Investment Choice Using Fuzzy Arithmetic. „*J. of Chin. Ins. of Industrial Engineers*” 2005, Vol. 22(2).
- Ward T.L.: Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis. 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, 1985.

FUZZY RELATION ON CASH FLOW EQUIVALENCE

Summary

There are presented premises inducing to generalize the concept of cash flow equivalence to fuzzy case. As a result of taking these studies was obtained membership function of fuzzy relation of cash flow equivalence. Obtained model was applied for determine the length of accounting period used in conditions of high inflation.

Adam Sojda

Politechnika Śląska w Gliwicach

ELASTYCZNOŚĆ DECYZYJNA I RYZYKO W OCENIE PROJEKTÓW INWESTYCYJNYCH PRZY ZASTOSOWANIU METODY PAY-OFF*

Wprowadzenie

Koniec pierwszej dekady XXI wieku to czas kryzysu finansowego i gospodarczego. Jest to również czas, w którym pojawia się sprzyjający klimat do dyskusji o sposobach uwzględnienia ryzyka oraz elastyczności decyzyjnej w ocenie prowadzonej przez przedsiębiorstwa działalności. Racjonalne staje się formułowanie ocen, prognozowanie przyszłości na podstawie metod scenariuszowych. Konstruowane na podstawie zróżnicowanych założeń scenariusze pozwalają na lepsze zrozumienie przyszłości, co sprzyjać może zwiększeniu trafności podejmowanych decyzji. Powstała dodatkowa wiedza może pobudzać procesy zmian niezbędnych do osiągnięcia sukcesu. Jedną z uznanych metod odnośnie wyceny zarówno wartości przedsiębiorstwa, jak i projektów inwestycyjnych są opcje rzeczowe, które stosowano również dla projektów górniczych¹. Najczęściej opcje rzeczowe pokazane są w kontekście drzewa dwuminowego, trójminowego. Uzależnienie opcji od jednego parametru jakim jest cena nie oddaje w pełni specyfiki produkcji górniczej. Dlatego w szczególności dla projektów

* Praca powstała w ramach realizacji projektu badawczego nr N N524 341640 „Metoda wyznaczania wartości kopalni węgla kamiennego” finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki.

¹ Karbownik: Zarządzanie ryzykiem w projekcie restrukturyzacji górnictwa węgla kamiennego. „Wiadomości Górnicze” 2005, nr 1; W. Rudny: Opcje rzeczowe w procesie tworzenia wartości przedsiębiorstwa. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2009; P. Saługa: Elastyczność decyzyjna w procesach wyceny projektów Geologiczno-Górnictw. Instytut Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią. PAN, Kraków 2011; M. Sierpińska, T. Jachna: Metody podejmowanie decyzji finansowych Analiza przykładów i przypadków. PWN, Warszawa 2007; A. Sojda: Zastosowanie modelu dwuminowego i trójminowego do wyceny opcji rzeczowych. Zeszyty Naukowe. Politechnika Śląska, Gliwice 2013, nr 64; M. Turek: Modele finansowania działalności operacyjnej przedsiębiorstw górniczych. GIG, Katowice 2011; Z. Wilimowska, M. Łukaniuk: Dwuminowy model wyceny opcji rzeczowych. „Badania Operacyjne i Decyzyjne” 2005, nr 1.

realizowanych w przedsiębiorstwach górniczych istnieje konieczność poszukiwania innych metod poza metodami klasycznymi. Jedną z takich metod jest metoda rozmyta pay-off przedstawiona w pracach². Celem artykułu jest pokazanie zastosowania tej metody dla wyceny wartości pewnego realizowanego przez przedsiębiorstwo górnicze projektu.

1. Ryzyko

Ryzyko jest zjawiskiem o charakterze powszechnym w działalności gospodarczej, choć nie dotyka ono każdej z dziedzin gospodarki w takim samym stopniu. U źródeł ryzyka znajduje się konieczność podejmowania decyzji dotyczących przyszłości w warunkach teraźniejszości.

Złożoność otaczającej rzeczywistości powoduje, że wynik działania może być opisany funkcją zależną od podjętej decyzji oraz innych czynników. W działalności gospodarczej umiejętność oszacowania ryzyka jest równie ważna jak identyfikacja źródeł jego powstania.

Pojęcie ryzyko można rozpatrywać w aspekcie obiektywnym i subiektywnym. Poprzez ryzyko obiektywne rozumiemy względne odchylenie strat rzeczywistej od strat oczekiwanej. Powala to na określenie miary ryzyka jako miary rozproszenia, np. odchylenia standardowego, współczynnika zmienności. Za miernik ryzyka można również przyjąć maksymalne prawdopodobne odchylenie rezultatu rzeczywistego od wielkości zakładanej. Miary te można stosować przy założeniu, że odpowiednie rozkłady są znane bądź też w sytuacji, kiedy obowiązuje prawo wielkich liczb (posiadamy odpowiednio dużą liczbę danych statystycznych). Ryzyko subiektywne odnosi się do niepewności opartej na osobistych uwarunkowaniach. „Ryzyko subiektywne jest indywidualną oceną szansy wystąpienia określonego rezultatu”³. „Przez ryzyko rozumieć będziemy potencjalne, niepożądane zdarzenie, które może spowodować, że cele projektu nie zostaną osiągnięte”⁴.

² C. Carlson, R. Fuller: A Fuzzy Approach to Real Option Valuation. „Fuzzy set and Systems” 2003, Vol. 139, s. 297-312; M. Collan, R. Fuller, J. Mezei: A Fuzzy Pay-off Method for Real Option Valuation. „Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences” 2009. Article ID 2238196, 14 Pages. 10.1155/2055/238196; M. Collan, J. Kinnunen: A Procedure for the Rapid Pre-acquisition Screening of Target Companies Using the Pay-off Method For Real Option Valuation. „Journal of Real Option Strategy” 2011, Vol. 4, No. 1, s. 117-141; M. Keswani Shackleton: How real Option Disinvestment Flexibility Augments Project NPV. „European Journal of Research” 2006, Vol. 168, s. 240-252.

³ Ubezpieczenia. Rynek i ryzyko. Red. W. Ronka-Chmielowiec. PWE, Warszawa 2002.

⁴ D. Kuchta: Zarządzanie czasem i ryzykiem projektów – nauka i praktyka. W: Modelowanie preferencji a ryzyko '08. Red. T. Trzaskalik. AE, Katowice 2008.

2. Elastyczność decyzyjna

Od zaprezentowania prac Blacka, Scholesa (1972) oraz Mertona (1973) na rynkach finansowych trwa rozwój instrumentów pochodnych. Teoria wyceny opcji bazuje na obserwacji iż wraz z napływem nowych informacji ulegać mogą zmiany zarówno warunki funkcjonowania inwestora jak i sytuacja na rynku. Z czasem zauważono oczywiste analogie pomiędzy opcjami finansowymi a możliwościami działania operacyjnego w przypadku zarządzania projektami inwestycyjnymi. Uznano, że postrzeganie możliwości podejmowania decyzji inwestycyjnych to pewien zestaw opcji na aktywach rzeczowych⁵. Ten paradygmat stanowił nowe podejście do wyceny i jednocześnie oceny ekonomicznej projektów inwestycyjnych. Zauważmy, że przedsiębiorstwo decydując się na realizację projektu inwestycyjnego w danej chwili decyduje się na poniesienie nieodwracalnych nakładów inwestycyjnych realizując przy tym opcję inwestycyjną, gdyż rezygnuje z możliwości oczekiwania na nowe informacje, które mogłyby zaważyć na podjęciu decyzji o wyborze momentu rozpoczęcia inwestycji. Ta utrata możliwości podjęcia decyzji jest swoistym kosztem, który powinien być uwzględniony podczas oceny inwestycji. Do najczęstszych rodzajów opcji rzeczowych należą:

- opcja opóźnienia – możliwość odroczenia w czasie realizacji inwestycji,
- opcja rezygnacji – możliwość zaprzestania realizacji projektu inwestycyjnego,
- opcja zamiany skali działania – zmniejszenie, zwiększenie pierwotnie zakładanej skali projektu np. czasowe zwiększenie bądź ograniczenie wielkości produkcji⁶.

Zastosowanie metod wyceny opcji rzeczowych w procesie wyceny wartości inwestycji daje możliwość uwzględnienia wśród czynników wpływających na wartość projektu elastyczności w podejmowaniu decyzji odnośnie do jego realizacji. Możliwa jest ocena projektu uwzględniająca adaptacja realizacji projektu do zmieniających się warunków gospodarczych⁷.

⁵ S. Mayers: Determinations of Corporate Borrowing. „Journal of Financial Economics” 1977, Vol. 5, No. 2, s. 147-175.

⁶ W. Rudny: Op. cit.

⁷ Z. Wilimowska, M. Łukaniuk: Op. cit.

3. Projekty inwestycyjne w górnictwie węgla kamiennego

Działalność górnicza jest działalnością niepowtarzalną i wyjątkową w zakresie pozyskania surowca mineralnego. Przedsiębiorstwa górnicze inwestują w poszukiwania geologiczne mając nadzieję na odkrycie złóż kopalin i jednocześnie zajmują się eksploatacją odkrytych złóż. Złoże kopaliny charakteryzuje się przede wszystkim specyficznym umiejscowieniem, nieodnawialnością, niepowtarzalnością w wielu aspektach np. wielkości i jakości zasobów, sposobu zalegania, dostępności, warunków górnico-geologicznych oraz rzadkości występowania. Natomiast przedsięwzięcia geologiczno-górniczne cechują się kapitałochłonnością – wysokie nakłady inwestycyjne związane są z działalnością poszukiwawczą, pracami udostępniającymi oraz przygotowawczymi, relatywnie długimi cyklami inwestycyjnymi i okresami istnienia, zróżnicowaniem odnośnie do warunków prowadzenia eksploatacji.

Planując proces produkcji należy brać pod uwagę, że w najlepszej kategorii rozpoznania złoża zakłada się, że zakładane warunki geologiczno-górniczne różnić się mogą od rzeczywistych o 10%⁸. Na źródła ryzyka składają się również: koszt procesu wydobywania jak i cena uzyskana ze sprzedaży pozyskanej kopaliny. Wielkości te na etapie wstępnej oceny opłacalności projektu są szacowane, zatem nie są znane ich rzeczywiste realizacje. Ryzyko charakteryzujące projekty inwestycyjne w górnictwie powinno znaleźć swoje odzwierciedlenie w metodach oceny tych projektów.

4. Ocena projektów inwestycyjnych

Projekty inwestycyjne mogą być oceniane za pomocą różnych metod. Jednakże w przypadku projektów charakteryzujących się odpowiednio długim czasem trwania najczęściej stosowanymi są metody dynamiczne, które uwzględniają zmianę wartości pieniądza w czasie. Zastosowanie tych metod pozwala porównać projekty poprzez zdyskontowanie wydatków z różnych okresów do okresu bazowego. Najpopularniejszym dynamicznym wskaźnikiem w ocenie projektów inwestycyjnych jest wskaźnik NPV (Net Present Value – wartość bieżąca netto). Wskaźnik ten to suma zdyskontowanych, dla każdego okresu przepływów finansowych netto przy określonym poziomie średniego ważonego

⁸ Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 6 lipca 2005 r. w sprawie szczegółowych wymagań, jakimi powinny odpowiadać dokumentacje geologiczne złóż kopalin. Dz.U. 2005, nr 136, poz. 1151.

kosztu kapitału. Koszt kapitału określony jest przez minimalną stopę zwrotu z kapitału dla inwestora, który przeznacza własne bądź pożyczone środki pieniężne na dane przedsięwzięcie. Wartość NPV wyznacza się na podstawie wzoru

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+WACC)^t} = \sum_{t=1}^n PV_t \quad (1)$$

gdzie:

NPV – wartość bieżąca netto,

CF_t – przepływy gotówkowe w okresie $t = 1, 2, \dots, n$,

WACC – średni ważony koszt kapitału,

PV_t – zaktualizowany przepływ z okresu $t = 1, 2, \dots, n$.

Zastosowanie do oceny projektów inwestycyjnych wskaźnika *NPV* bazuje na prognozach przepływów w poszczególnych okresach. Nie pozwala na bezpośrednie uwzględnienie ryzyka czy też elastyczności decyzyjnej w procesie oceny projektu. Chcąc uwzględnić w ocenie projektu inwestycyjnego ryzyko można zastosować rozmytą metodę *NPV*⁹. Można również dokonać analizy wyznaczając wskaźnik *NPV* dla różnych wariantów *WACC* czy też wartości przepływów *CF*.

5. Ocena projektów inwestycyjnych – metoda rozmyta pay-off

Bardzo często próba uchwycenia oraz opisu fragmentu otaczającej rzeczywistości tylko za pomocą jednej wartości jest niewystarczająca. Mnogość wariantów powoduje, że poszukujemy możliwości prostego i nieskomplikowanego przedstawienia spraw skomplikowanych. Jedną z takich form opisu są liczby rozmyte i zbiory rozmyte¹⁰. Ta próba matematycznego ujęcia nieostrości pojęć powala zamiast kategorii „dokładnie” posłużyć się kategorią „w przybliżeniu”. Zastosowanie liczb rozmytych pozwala na wprowadzenie dyspersji jako dodatkowego elementu składającego się na liczbę rozmytą. Uwzględnione rozproszenie może stanowić swoistą miarę ryzyka.

Definicja 1. Zbiorem rozmytym **A** w pewnej niepustej przestrzeni **X** nazywamy zbiór par $\mathbf{A} = \{(x, A(x)); x \in \mathbf{X}\}$, w którym $A(x): \mathbf{X} \rightarrow [0; 1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego **A**.

⁹ D. Kuchta: Fuzzy Capital Budgeting. „Fuzzy Set and System” 2000, Vol. 111, s. 367-385.

¹⁰ L. Zadeh: Fuzzy Sets. „Information and Control” 1965, Vol. 8, s. 338-353.

Funkcja ta, dla każdego $x \in X$ określa stopień jego przynależności do zbioru rozmytego **A**. Rozróżnia się trzy zasadnicze przypadki:

- pełna przynależność elementu x do zbioru rozmytego, wtedy $A(X)=1$,
- brak przynależności elementu do zbioru rozmytego, wtedy $A(X)=0$,
- częściowa przynależność elementu do zbioru rozmytego, wtedy $0 < A(X) < 1$.

Definicja 2. Liczbą rozmytą A nazywamy dowolny zbiór rozmyty określony w przestrzeni liczb rzeczywistych **R** za pomocą funkcji przynależności

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ f_A(x) & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{dla } b \leq x \leq c \\ g_A(x) & \text{dla } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{dla } d \leq x \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $f_A(x)$, $g_A(x)$ są funkcjami ciągłymi, przy czym $f_A(x)$ jest rosnąca w przedziale $[a, b]$, a $g_A(x)$ jest malejąca w przedziale $[c, d]$. Dopuszcza się również przyjmowanie przez wartości a, d nieskończoności.

W opinii osób zajmujących się oceną projektów inwestycyjnych z przedstawionych różnych klas funkcji przynależności klasa trójkątna została uznana za najbardziej perspektywiczną.

Definicja 3. Funkcja przynależności klasy t trójkątnej jest definiowana następująco

$$A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a-x}{\alpha} & \text{dla } a - \alpha \leq x \leq a \\ 1 - \frac{x-a}{\beta} & \text{dla } a \leq x \leq a + \beta \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} \quad (3)$$

Liczba rozmyta o klasie przynależności t może być zapisana jako $A = (a, \alpha, \beta)$.

Zamiana liczby rozmytej na liczbę rzeczywistą odbywa się na podstawie operacji wyostrażania.

Definicja 4. Wyostrzeniem liczby rozmytej $A = (a, \alpha, \beta)$ nazywany wartością rzeczywistą wyznaczoną za pomocą wzoru

$$V = a + \frac{\beta - \alpha}{6} \quad (4)$$

Przedstawiony sposób wyostrażania dla liczby rozmytej trójkątnej nie jest jedyny¹¹.

Definicja 5. Metoda pay-off wyznacza wartość rzeczywistą ROV (Real Option Valuation) za pomocą wzoru

$$ROV = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx} E(A_+) \quad (5)$$

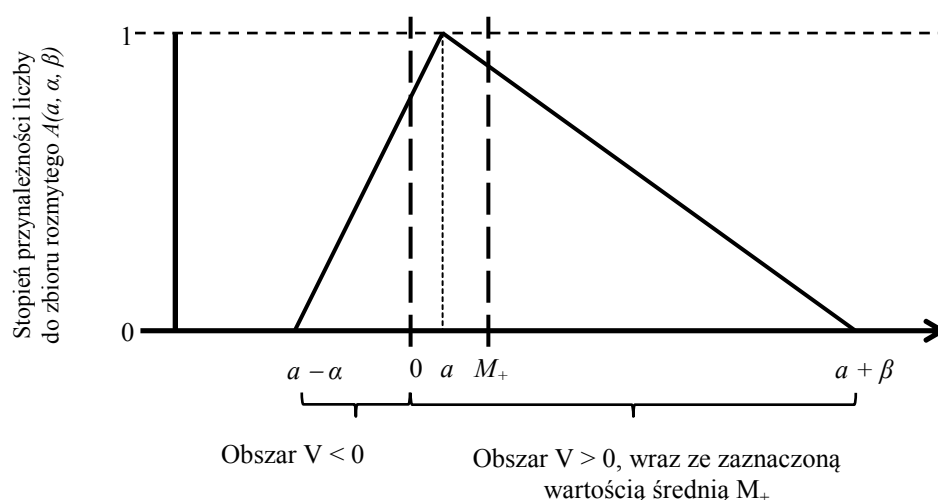
gdzie $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx$ pole pod funkcją przynależności, $\int_0^{+\infty} A(x) dx$ pole pod funkcją przynależności dla wartości dodatnich. Wartość $E(A_+)$ wyznaczana ze wzoru

$$E(A_+) = \begin{cases} a + \frac{\beta - \alpha}{6} & \text{dla } a - \alpha > 0 \\ \frac{(\alpha - a)^3}{6\alpha^2} + a + \frac{\beta - \alpha}{6} & \text{dla } a - \alpha \leq 0 < a \\ \frac{(a + \beta)^3}{6\beta^2} & \text{dla } a \leq 0 < a + \beta \\ 0 & \text{dla } a + \beta \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Wzór (5) wyznacza wartość ROV jako wartość oczekiwaną przy warunku, że wartości są dodatnie (projekt jest realizowany) dodatkowo przeskalowaną współczynnikiem określającym mierzącym udział wartości dodatnich do wszystkich.

Na rys. 1 przedstawiono trójkątną liczbę rozmytą. Wprowadzenie liczb rozmytych pozwala na uwzględnienie w postaci jednej „liczby” bardziej złożonych struktur, w tym na uwzględnienie ryzyka. Zaproponowana metoda pay-off przypisuje wartość rzeczywistą do liczby rozmytej uwzględniając dodatkowo położenie liczby w stosunku do wartości 0.

¹¹ D. Kuchta: Op. cit.; L. Zadeh: Op. cit.



Rys. 1. Trójkątna liczba rozmyta A , z zaznaczoną wartością średnią M_+

Ta dodatkowa modyfikacja ma szczególne znaczenie dla zastosowania tej metody wyceny projektu inwestycyjnego jako opcji rzeczowej.

Ocena projektu inwestycyjnego za pomocą metody pay-off polega na budowie trzech scenariuszy rozwoju:

- scenariusza bazowego – zakłada najbardziej prawdopodobny rozwój sytuacji,
- scenariusza pesymistycznego – zakłada najgorszy ze scenariuszy, który można uznać za realny,
- scenariusza optymistycznego – zakłada najlepszy ze scenariuszy, który można uznać za realny.

Dla każdego scenariusza szacowane są przepływy finansowe oraz wyznaczona zostaje wartość NPV zgodnie ze wzorem (1). Z otrzymanych wartości NPV tworzy się liczbę rozmytą trójkątną $A = (a, \alpha, \beta)$. Wartość a odpowiada wartości NPV dla scenariusza bazowego, zaś pozostałe parametry są odchyleniami wartości NPV dla pozostałych scenariuszy od wartości NPV dla scenariusza bazowego. Następnie wyznacza wartość V na podstawie wzoru (4) oraz ROV na podstawie wzorów (5) i (6).

Konstrukcja wzoru (5) pokazuje, że mamy tu do czynienia z opcją rzeczową. Wartość opcji dla projektu, w którym nawet najlepszy scenariusz wyznacza wartość NPV mniejszą od zera jest równa zero. W przypadku, kiedy wszystkie wartości NPV dla wszystkich scenariuszy są dodatnie wartość ROV jest tożsama z wartością V wzór (4) – zaproponowana wartość wyostżenia lic-

by rozmytej trójkątnej. W przypadkach pośrednich wartość opcji jest szacowana przy uwzględnieniu założenia, że inwestycja jest realizowana, jeśli wartość NPV jest dodatnia. W wartości opcji uwzględniona jest wartość średnia dla dodatnich wartości NPV przeskalowana przez iloraz powierzchni dla wartości dodatnich NPV oraz wszystkich – ułamek wyznaczony przez dwie całki we wzorze (5).

Zastosowanie prezentowanej metody do oceny projektów inwestycyjnych pozwala na uwzględnienie zarówno ryzyka poprzez podanie trzech wartości przepływów dla poszczególnych scenariuszy, jak i również elastyczności decyzyjnej poprzez samą konstrukcję scenariuszy odnoszących się do różnych wariantów realizacji projektu. Zastosowanie w ostatniej fazie oceny wzoru (5) sprowadza ocenę do jednej wartości, ale wartość ta zależy nie tylko od wartości bazowej NPV, ale uwzględnia wpływ pozostałych scenariuszy.

6. Przykłady zastosowań

Przykład I

W kopalni prowadzona jest eksploatacja pewnego pola wybierkowego. Pierwotny projekt zakładał rozcięcie pola za pomocą trzech ścian: ściany I, ściany II, ściany III. Parametry ścian są do siebie zbliżone, długie na 100 m wysokie na 1,5 m o wybiegu 1500 m. Podczas eksploatacji ściany I nie natrafiono na żadne przeszkody natury geologicznej i proces eksploatacji przebiegał zgodnie z założonym planem techniczno-ekonomicznym. Podczas eksploatacji ściany II okazało się, że w połowie wybiegu ściany wystąpiła anomalia geologiczna i zamiast węgla pojawiał się kamień na przestrzeni 40 m. Z tego powodu doszło do zwiększenia kosztów związanych z koniecznością urabiania kamienia zamiast węgla. Zmniejszenie postępu prac wpłynęło na wydłużenie czasu trwania projektu wydobywania węgla ze ściany II. Należy podjąć decyzję, czy ekonomicznie opłacalna jest kontynuacja wydobywania ze ściany III zgodnie z istniejącym projektem – planem techniczno-ekonomicznym. Chcąc wykorzystać metodę rozmytą pay-off do oceny projektu założono następujące trzy scenariusze:

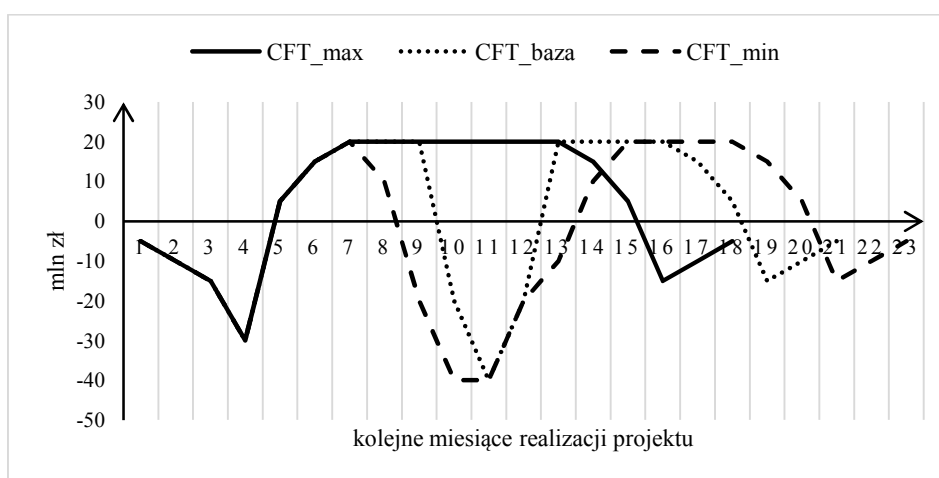
- 1) wariant optymistyczny – zgodny z obecnie założonym projektem,
- 2) wariant najbardziej prawdopodobny – zgodny z wynikami otrzymanymi dla ściany II zakładający podjęcie tych samych działań jak w przypadku ściany II i o analogicznych kosztach,

3) wariant pesymistyczny – zakładający, że obszar kamienia może się zwiększyć do 80 m; wariant ten powstał na podstawie opinii ekspertów oraz uwzględnił koszty obserwowane podczas realizacji wydobywania ze ściany II.

Warto zauważyć, że dwa ostatnie warianty wpływają nie tylko na wielkość przepływów, ale również na czas realizacji procesu eksploatacji ściany. Dla ustalonych wariantów przepływy finansowe przedstawia wykres 1.

Wykres 1

Wartości przepływów dla rozważanych scenariuszy



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z kopalni X.

Przedstawione na wykresie przepływy odzwierciedlają rzeczywiste fazy w szeroko pojętym procesie eksploatacji ściany. Faza pierwsza to drążenie wyrobisk udostępniających. Obejmuje ona trzy pierwsze miesiące. W okresie tym ponoszone są tylko i wyłącznie koszty. Kolejna faza to faza zbrojenia ściany, w tej fazie również ponoszone są koszty związane z przygotowaniem ściany do właściwej eksploatacji, jak i również dzierżawy kombajnu ścianowego. Kolejną fazą jest faza eksploatacji. W fazie tej zakłada się stały postęp prac, co prowadzi do uzyskania w tym okresie stałych przepływów. Końcowa to faza, gdzie postęp w przypadku eksploatacji ulega zmniejszeniu w związku z wyhamowaniem ściany. Zmniejsza się ilość wydobytego węgla. Ostatnia to faza likwidacji. Na początku tej fazy koszty są największe ze względu na zaangażowanie czynnika ludzkiego (wynagrodzenia) oraz ponoszone w dalszym ciągu koszty związane

z kosztami wynajmu maszyn górniczych. Wariant ten do oceny ekonomicznej ściany III został przyjęty za najbardziej optymistyczny, gdyż należało liczyć się z możliwością wystąpienia kamienia, a co za tym idzie zwiększeniem kosztów oraz wydłużeniem czasu realizacji eksploatacji ściany III. Oszacowane przepływy dla tego wariantu stanowią bazę dla oszacowania przepływów w wariantcie najbardziej prawdopodobnym. Dla tego wariantu postanowiono skorygować istniejące przepływy o wartości rzeczywiste pojawiające się przy eksploatacji ściany II. W tym przypadku pojawiają się dodatkowe koszty związane z i pracami polegającymi na zmianie tempa prowadzonych prac, jak również braku urobku węgla (w tym okresie wydobywana była głównie skała). Wariant pesymistyczny zakładał, że skała nie będzie pojawiała się na przestrzeni 40 metrów tylko 80. Przyjęcie tego założenia powoduje, że wydłuża się czas realizacji eksploatacji przy jednoczesnym pojawieniu się ujemnych przepływów związanych z brakiem urobku węgla oraz koniecznością utrzymania odpowiedniego poziomu zatrudnienia. Wartość *WACC* przejęto na poziomie 9,5% i jest ona zgodna z wartościami przyjmowanych dla projektów górniczych w Polsce¹². Dla każdego z trzech wymienionych scenariuszy wyznaczana jest wartość NPV. Otrzymane wartości są następujące: $NPV_{max} = 82,21$, $NPV_{baza} = 6,75$, $NPV_{min} = -59,96$. Na tej podstawie wyznaczono wartości $V = 11,12$ oraz $ROV = 10,11$. Oceny projektu inwersyjnego za pomocą wartości V oraz ROV są zbliżone i dodatnie. Dlatego nie zdecydowano się na zmianę projektu i założono, że eksploracja będzie prowadzona zgodnie z założeniami, a korekty na skutek zmiany geologicznych będą prowadzone na bieżąco.

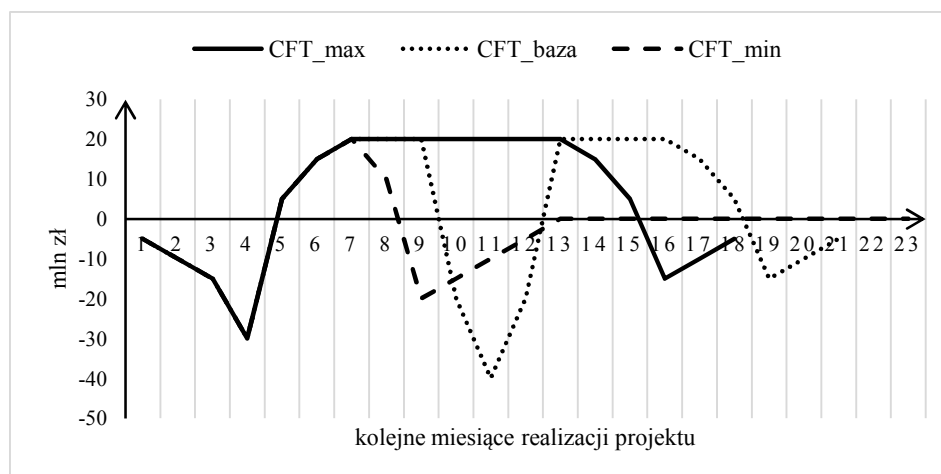
Przykład II

Na podstawie danych z przykładu I zaproponowano zmianę wariantu pesymistycznego – zastosowanie opcji rezygnacji. Po stwierdzeniu wystąpienia kamienia istnieje możliwość wcześniejszego zakończenia wydobywania przy założeniu, że przez dwa kolejne miesiące urabiania nie pojawi się węgiel. Na wykresie 2 pokazano oszacowane wartości przepływów, dla proponowanych scenariuszy.

¹² Karbownik: Op. cit.; M. Turek: Op. cit.; Tabele współczynników do wyznaczenia *WACC*. [http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/ \(06.2013\)](http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/ (06.2013)).

Wykres 2

Wartości przepływów dla rozważanych scenariuszy



Źródło: Ibid.

Analogicznie jak dla przykładu I, wyznaczone zostały wartości $NPV_{max} = 82,21$ mln, $NPV_{baza} = 6,75$ mln, $NPV_{min} = -94,80$ mln oraz wartości: $V = -6,296$ oraz $ROV 8,085$. W tym przypadku wartości te są mniejsze niż wartości dla realizacji z wariantu pesymistycznego zgodnie z przykładem I, zatem należy wykonać zaplanowany projekt do końca. Rozważany był również przypadek, w którym po natrafieniu na kamień i przy braku węgla przez kolejny miesiąc eksploatacji podejmowano decyzję o zaprzestaniu produkcji. Otrzymałoby przepływy, które po zdyskontowaniu oraz wyznaczaniu wartości $NPV_{min} = -57,77$ mln powalają na oszacowanie $V = 12,22$ mln oraz $ROV 10,27$ mln. Wartości te są nieco wyższe niż dla wariantu kontynuowania wydobywania. Jednakże w przypadku projektów górniczych należy jeszcze doliczyć konieczność ponoszenia dodatkowych kosztów stałych związanych z utrzymaniem załogi, która nie jest potrzebna w pracach likwidacyjnych, a nie ma rzeczywistego zatrudnienia, ponieważ nie istnieje możliwość przygotowania kolejnego pola w tak krótkim czasie. Zatem podjęto decyzję o kontynuowaniu wydobywania.

Podsumowanie

Nowoczesne zarządzanie wymaga stosowania metod, które nie będą pominęły ryzyka towarzyszącego działalności gospodarczej, jak i również elastyczności w podejmowaniu decyzji. Przedstawienie przepływów jako liczby rozmytej pozwala na uwzględnienie tych aspektów. Zastosowanie tych metod wymaga dodatkowego nakładu w postaci wygenerowania dodatkowych dwóch scenariuszy. Metoda pay-off oceny projektu inwestycyjnego jest jedną z wielu metod rozmytych. Uwzględnia jednak w większym stopniu wpływ ujemnej wartości NPV na wycenę całego projektu. O przydatności metody oceny projektu świadczy częstość jej stosowania. Potencjał tej metody to przede wszystkim bazowanie na uznanej metodzie NPV, prostota implementacji i stosunkowo mały koszt zastosowania w postaci dodatkowych dwóch scenariuszy.

Literatura

- Carlson C., Fuller R.: A Fuzzy Approach to Real Option Valuation. „Fuzzy set and Systems” 2003, Vol. 139.
- Collan M., Fuller R., Mezei J.: A Fuzzy Pay-off Method for Real Option Valuation. „Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences” 2009. Article ID 2238196, 14 Pages. 10.1155/2055/238196
- Collan M., Kinnunen J.: A Procedure for the Rapid Pre-acquisition Screening of Target Companies Using the Pay-off Method For Real Option Valuation. „Journal of Real Option Strategy” 2011, Vol. 4, No. 1.
- Karbownik: Zarządzanie ryzykiem w projekcie restrukturyzacji górnictwa węgla kamiennego. „Wiadomości Górnicze” 2005, nr 1.
- Keswani Shackleton M.: How real Option Disinvestment Flexibility Augments Project NPV. „European Journal of Research” 2006, Vol. 168.
- Kuchta D.: Fuzzy Capital Budgeting. „Fuzzy Set and System” 2000, Vol. 111.
- Kuchta D.: Zarządzanie czasem i ryzykiem projektów – nauka i praktyka. W: Modelowanie preferencji a ryzyko '08. Red. T. Trzaskalik. AE, Katowice 2008.
- Mayers S.: Determinations of Corporate Borrowing. „Journal of Financial Economics” 1977, Vol. 5, No. 2.
- Rudny W.: Opcje rzeczowe w procesie tworzenia wartości przedsiębiorstwa. Akademia Ekonomiczna, Katowice 2009.
- Saługa P.: Elastyczność decyzyjna w procesach wyceny projektów Geologiczno-Górnich. Instytut Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią. PAN, Kraków 2011.
- Sierpińska M., Jachna T.: Metody podejmowanie decyzji finansowych Analiza przykładów i przypadków. PWN, Warszawa 2007.

- Sojda A.: Zastosowanie metody pay-off do wyceny wartości przedsiębiorstwa. Zeszyty Naukowe. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2012, nr 737.
- Sojda A.: Zastosowanie modelu dwumianowego i trójminowego do wyceny opcji rzeczowych. Zeszyty Naukowe. Politechnika Śląska, Gliwice 2013, nr 64.
- Tarczyński W.: Rynki kapitałowe. Metody ilościowe. Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa 1997.
- Turek M.: Modele finansowania działalności operacyjnej przedsiębiorstw górniczych. GIG, Katowice 2011.
- Wilimowska Z., Łukaniuk M.: Dwumianowy model wyceny opcji rzeczowych. „Badania Operacyjne i Decyzje” 2005, nr 1.
- Zadeh L.: Fuzzy Sets. „Information and Control” 1965, Vol. 8.
- Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 6 lipca 2005 r. w sprawie szczegółowych wymagań, jakimi powinny odpowiadać dokumentacje geologiczne złóż kopalin. Dz.U. 2005, nr 136, poz. 1151.
- Tabele współczynników do wyznaczenia WACC. [http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/\(06.2013\)](http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/(06.2013)).
- Ubezpieczenia. Rynek i ryzyko. Red. W. Ronka-Chmielowiec. PWE, Warszawa 2002.

FLEXIBILITY IN DECISION-MAKING AND RISK ASSESSMENT OF INVESTMENT PROJECTS USING THE PAY-OFF METHOD

Summary

The paper presents a fuzzy pay-off method for the assessment of investment projects. This method allows the evaluation of investment project as an option kind. Use it independent of the three scenarios is an important element to take into account also the flexibility of decision-making. The examples presented applicable method for the evaluation of investment projects took place in the hard coal mines.